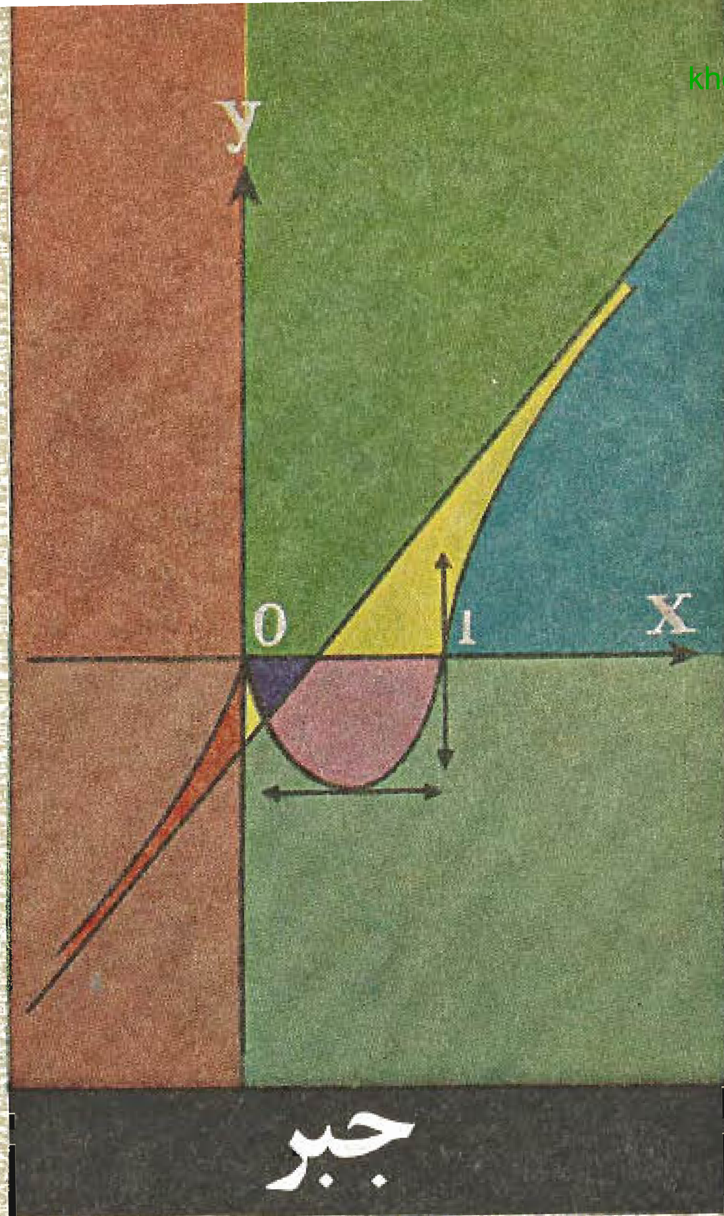


برای سال ششم ریاضی

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش



بها در تمام کشور ۲۵ ریال

توانا بود هرکه دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

جبر

برای سال ششم ریاضی

چاپ و توزیع از :



۱۳۴۸



این کتاب که به وسیلهٔ آقایان : موسی آذرنوش ، احمد بیرشك ، جهانگیر شمس‌آوری ، عبدالغنی علیم مروستی ، پروفسور تقی فاطمی ، باقر لحوی و شادروان محسن هنربخش نگارش یافته ، برطبق مادهٔ ۳ قانون کتابهای درسی و اساسنامهٔ سازمان کتابهای درسی ایران برای تدریس در دبیرستانها برگزیده شده است .

چاپ از : اقبال

کتاب یکی از ارکان اصلی آموزش و پرورش در اجتماع کنونی بشری است. هر دانش پژوه که خواهان حل مشکل یا درك حقیقتی باشد، از مصاحبت کتاب و توسّل بدین وسیلهٔ مطمئن و مشاور مؤتمن ناگزیر است.

دانش‌آموزان با استعانت از کتاب می‌توانند به جهان بیکران علم دسترسی یابند و سرمایهٔ لازم برای رفاه حال خویش و تعالی جامعهٔ خود کسب کنند.

وزارت آموزش و پرورش مساعی خویش را بکار می‌برد تا برای استفادهٔ دانش‌آموزان کتابهایی عرضه کند که با پیشرفتهای علمی و فنّی جهان مترقّی امروز هماهنگ و بر اساس جدیدترین اصول آموزش و پرورش تنظیم شده باشد.

نباید از نظر دورداشت که با وسعت دامنهٔ علوم در جهان امروز، هر اندازه کتب درسی جامع و کامل تهیّه شده باشد کافی برای تجهیز علمی جوانان نیست و دانش‌آموزان گرامی نباید مطالعات خود را به این کتب محدود سازند، بلکه باید با راهنمایی معلّمان خویش در ساعات فراغت به مطالعهٔ کتاب در کنار دروس خود بپردازند و اوقات عزیز خویش را برایگان از کف ندهند.

بر محقّقان و مؤلّفان کشور فرض است که در راه تهیّهٔ اینگونه کتابها بکوشند. بخصوص در این عصر مترقّی که به ارادهٔ شاهنشاه آریا مهر و در سایهٔ انقلاب ششم بهمن ماه ۱۳۴۱ و با اجرای طرح سپاه دانش، اهالی نقاط دورافتادهٔ مملکت نیز از نعمت سواد برخوردار گردیده و هر روز بر عدهٔ افراد کتابخوان کشور افزوده می‌شود فرصت را غنیمت شمرند و به تألیف کتابهایی مفید در رشته‌های مختلف علوم و فنون و ادب بپردازند و از این راه به پیشرفت فرهنگ و علوم و رشد اقتصادی کشور خدمتی ارزنده بنمایند.

وزیر آموزش و پرورش ـ دکتر فرخ رو پارسای

فهرست مندرجات

عنوان | صفحه

لطفاً این غلط چاپی را تصحیح فرمایید :

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۳۲	۳	$\frac{\Delta y}{\Delta n}$	$\frac{\Delta y}{\Delta u}$

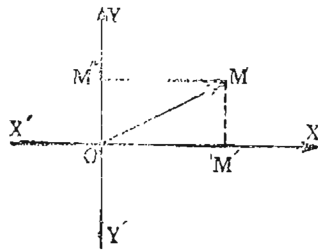
بنام خدا

فصل اول

مراجعه وتکمیل

مقدمه

۱ـ مختصات یك نقطه از صفحه ـ برای اینکه جای نقطه‌ای مانند M را در یك صفحه بشناسیم ، چنین عمل می‌کنیم :
در آن صفحه ، دو محور عمود برهم $x'Ox$ و $y'Oy$ رسم می‌کنیم وتصویر $\overrightarrow{OM}$ را روی هریك از دو محور بدست می‌آوریم.



$\overline{OM'}$ (اندازهٔ جبری تصویر حامل OM بر محور $x'Ox$) را طول یا x نقطهٔ M و $\overline{OM''}$ (اندازهٔ جبری تصویر $\overrightarrow{OM}$ برمحور $y'Oy$) را عرض یا y نقطهٔ M می‌گویند .

$$y = \overline{OM''} \qquad x = \overline{OM'}$$

طول و عرض هر نقطه را **مختصات** آن نقطه در دستگاه مفروض xOy می‌نامند .

واضح است که اگر نقطهٔ M در دست باشد مختصات آن معلوم می‌شود و بعکس با داشتن مختصات نقطهٔ M می‌توان جای آن نقطه را بدست آورد .

عنوان	صفحه

لطفاً این غلط چاپی را تصحیح فرمایید :

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۳۲	۳	$\frac{\Delta y}{\Delta n}$	$\frac{\Delta y}{\Delta u}$

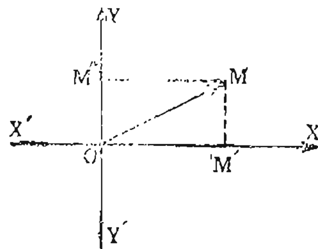
بنام خدا

فصل اول

مراجعه وتکمیل

مقدمه

۱ـ مختصات یك نقطه از صفحه ـ برای اینکه جای نقطه‌ای مانند M را دریك صفحه بشناسیم ، چنین عمل می‌کنیم : در آن صفحه ، دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ رسم می‌کنیم وتصویر $\overrightarrow{OM}$ را روی هریك از دو محور بدست می‌آوریم.



$\overline{OM'}$ (اندازهٔ جبری تصویر حامل OM بر محور $x'Ox$) را طول یا x نقطهٔ M و $\overline{OM''}$ (اندازهٔ جبری تصویر $\overrightarrow{OM}$ برمحور $y'Oy$) را عرض یا y نقطهٔ M می‌گویند .

$$y = \overline{OM''} \qquad x = \overline{OM'}$$

طول و عرض هر نقطه را **مختصات** آن نقطه در دستگاه مفروض xOy می‌نامند .

واضح است که اگر نقطهٔ M در دست باشد مختصات آن معلوم می‌شود و بعکس با داشتن مختصات نقطهٔ M می‌توان جای آن نقطه را بدست آورد .

O را مبدأ مختصات ، محور $x'Ox$ را محور طولها یا محور xها و محور $y'Oy$ را محور عرضها یا محور yها می‌گویند .

هرگاه طول و عرض نقطهٔ M بترتیب a و b باشند ایطور می‌نویسیم :

$M\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ یا $M(a \text{ و } b)$ و می‌خوانیم M به مختصات a و b .

تبصره ـ چون درفیزیك معمولاً کمیتهایی که به x و y نمایش داده می‌شوند مختلفند ، واحدهایی که برای اندازه‌گیری آنها بکار می‌رود نیز متفاوت است . اما در جبر که فقط کمیت طول یا درازی بکار برده می‌شود واحدی که روی دو محور مختصات گرفته می‌شود یکی است .

۲ـ اگر $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}\right.$ باشد ، تصاویر $\overrightarrow{AB}$ بر روی محور xها و yها بترتیب :

$$Y=y_2-y_1 \quad \text{و} \quad X=x_2-x_1$$

واندازهٔ قطعه خط AB چنین است :

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ومختصات نقطهٔ M وسط قطعه خط AB عبارتند از :

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{و} \quad y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$$

نتیجه ـ درمتوازی‌الاضلاع ABCD

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

۳ـ بطور کلی اگر M نقطه‌ای از قطعه خط AB باشد بقسمی

که داشته باشیم $\frac{MA}{BA}=k$ (k مقدار معلوم) ، مختصات نقطهٔ M عبارتند از :

$$x=(1-k)x_1+kx_2$$
$$y=(1-k)y_1+ky_2$$

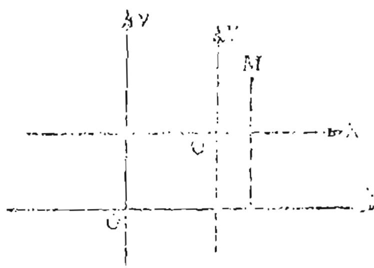
نتیجه ـ اگر G محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد :

$$x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)$$

$$y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$$

۴ـ تغییر مبدأ مختصات ـ انتقال محورها ـ اگرمحورهای مختصات xoy را باحفظ امتداد و جهتشان حرکت دهیم تا مبدأ مختصات برنقطهٔ $O_1\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ منطبق شود ، با فرض اینکه x و y مختصات نقطهٔ M در دستگاه xOy ، و X و Y مختصات همان نقطه در دستگاه XO_1Y باشد داریم :

$$\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$$



و از آنجا :

$$\begin{cases} X=x-a \\ Y=y-b \end{cases}$$

تمرین ـ x و y در رابطهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ صدق می‌کند . هرگاه محورهای مختصات را

به نقطهٔ $O_1(1 \text{ و } -1)$ انتقال دهیم چه رابطه‌ای بین مختصات جدید M وجود خواهد داشت؟

۵ـ معادلهٔ یك خط (راست یا منحنی) ـ معادلهٔ یك خط (راست یا منحنی) رابطه‌ای است لازم و کافی بین مختصات یك نقطه، برای اینکه آن نقطه روی خط باشد. بعکس آن خط را نمایش هندسی آن معادله می‌نامیم.

معادلهٔ یك خط راست، نسبت به‌طول وعرض یکی از نقاط آن، از درجهٔ اول است.

بعکس نمایش هندسی هرمعادلهٔ درجهٔ اول (نسبت به x و y) خط راست است.

۶ـ ضریب زاویه‌ای خط راست ـ ضریب زاویه‌ای خط $y=mx+n$ برابر m و ضریب زاویه‌ای خط $ax+by+c=0$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

اگر A نقطهٔ تلاقی خط بامحور xها باشد، ضریب زاویه‌ای آن خط (نسبت به محور xها) عبارت است از تانژانت زاویه‌ای که باید باندازهٔ آن زاویه، نیم‌خط Ax را حول نقطهٔ A، درجهت مثبت دوران داد تا برخط منطبق شود.

بنابراین ضریب زاویه‌ای خطوط متوازی یکسان است. بعکس اگر دو خط دارای یك ضریب زاویه‌ای باشند متوازیند.

۷ـ معادلهٔ خطی با ضریب زاویه‌ای m که از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ می‌گذرد عبارت است از:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

۸ـ ضریب زاویه‌ای خطی که از دو نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}\right.$ گذشته باشد برابر $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ و معادلهٔ آن خط چنین است:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{یا} \quad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

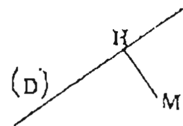
۹ـ اگر m ضریب زاویه‌ای خط D و m' ضریب زاویه‌ای خط D' و α زاویهٔ بین این دو خط باشد، داریم $\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{m-m'}{1+mm'}$

از دو اندازهٔ $\pm\frac{m-m'}{1+mm'}$ آن که مثبت است برابر تانژانت زاویهٔ حادهٔ بین دو خط، وآن‌که منفی است برابر تانژانت زاویهٔ منفرجهٔ بین دوخط است.

نتیجه ـ شرط متوازی بودن دوخط: تساوی دوضریب زاویه‌ای آن دوخط است، وشرط متعامد بودن دوخط این است که حاصل ضرب دوضریب زاویه‌ای آن دو خط برابر -1 باشد.

۱۰ـ فاصلهٔ نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ از خط (D) به معادلهٔ $ax+by+c=0$

یعنی طول عمود MH وارد از نقطهٔ M برخط (D)، چنین است:



$$MH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نتیجه ـ چون منصف‌الزاویهٔ دو خط مکان هندسی نقاطی است

که از دوخط به یك فاصله هستند، پس معادلهٔ منصف‌الزاویه‌های دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ چنین است :

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

۱۱ - تعیین معادلهٔ یك مکان هندسی ـ طریقهٔ اول یا طریقهٔ مستقیم ـ برای بیان این طریقه به ذکر یك مثال می‌پردازیم :

فرض کنیم منظور تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M باشدکه تفاضل مربعات فواصل آن از دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}5\\6\end{vmatrix}$ ، یعنی MA^2-MB^2 برابر ۱۶ می‌باشد . اگر مختصات M را x و y بنامیم داریم :

$$MA^2=(x-1)^2+(y-2)^2$$
$$MB^2=(x-5)^2+(y-6)^2$$
$$MA^2-MB^2=(x-1)^2+(y-2)^2-[(x-5)^2+(y-6)^2]=16$$

یا : $x+y=9$

یعنی x و y (مختصات) یك نقطهٔ از مکان در رابطهٔ اخیر صدق می‌کند ، و بعکس هر نقطه‌که مختصاتش در این رابطه صدق کند دارای خاصیت مذکور است . به عبارت دیگر (شمارهٔ ۵) رابطهٔ اخیر معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M ، که خطی است راست ، می‌باشد .

چنانکه می‌بینید برای یافتن معادلهٔ این مکان هندسی، نوشتیم‌که تفاضل مربعات فواصل نقطه‌ای به مختصات x و y از دو نقطهٔ A و B برابر ۱۶ است . بدین طریق معادلهٔ مکان هندسی بدست‌آمد .

از روی این مثال طریقهٔ زیر برای پیداکردن معادلهٔ مکان هندسی بدست می‌آید :

مختصات یك نقطهٔ غیر مشخص از مکان را x و y می‌نامیم و با استفاده از خاصیت مشترك نقاط مکان ، رابطهٔ بین x و y یعنی معادلهٔ مکان را بدست می‌آوریم .

طریقهٔ دوم ـ باز قبلاً به ذکر یك مثال می‌پردازیم :

از مثلث ABC دو رأس $A\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix}$ مفروضند و رأس C روی خط Δ به معادلهٔ $y=2x+3$ متحرک است . می‌خواهیم مکان هندسی نقطهٔ C محل تلاقی میانه‌های این مثلث را پیدا کنیم . فرض می‌کنیم که طول نقطهٔ C برابر α باشد ، بنابراین عرض آن برابر $2\alpha+3$ و مختصاتش $C\begin{vmatrix}\alpha\\2\alpha+3\end{vmatrix}$ خواهد بود وچون :

$$y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C) \quad \text{و} \quad x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)$$

مختصات G چنین است:

$$\begin{vmatrix} x=\frac{1}{3}(1-1+\alpha)=\frac{\alpha}{3} \\ y=\frac{1}{3}(0+0+2\alpha+3)=\frac{2\alpha}{3}+1 \end{vmatrix}$$

بدین ترتیب مختصات نقطهٔ G برحسب پارامتر α معلوم شد .

حال برای بدست‌آوردن معادلهٔ مکان ، به‌صورت $f(x , y)=0$ ، کافی است α را بین x و y حذف کنیم . برای این کار α را از رابطهٔ $x=\frac{\alpha}{3}$ برحسب x بدست می‌آوریم ودرعبارت y می‌بریم، خواهیم داشت:

$$y=2x+1$$

که معادلهٔ مکان G است. این مکان خطی است راست موازی باخط (Δ)

از روی این مثال طریقهٔ زیر برای یافتن معادلهٔ مکان بدست می‌آید :

اندازه‌های x و y ، مختصات یک نقطه از مکان ، را برحسب یک پارامتر بدست می‌آوریم (در صورت امکان) و پارامتر را بین x و y حذف می‌کنیم .

تبصرهٔ ۱ـ ممکن است تمام نقاط منحنی که معادلهٔ آن از حذف پارامتر بدست می‌آید متعلق به مکان نباشد .

مثلاً اگر داشته باشیم $M\left|\begin{array}{l}x=1+\sin\alpha\\ y=2\cos^2\alpha\end{array}\right.$ تمام نقاط منحنی نمایش تغییرات $y=-2x^2+4x$ که از حذف کردن α بین x و y بدست می‌آید متعلق به مکان M نیست ؛ زیرا وقتی که α جمیع مقادیر ممکنه را اختیار می‌کند ، x فقط در فاصلهٔ (۲ و ۰) می‌تواند تغییر کند یعنی همواره داریم : $0<x<2$ لذا فقط قوسی از این منحنی مکان هندسی M است که نمایش تغییرات $y=-2x^2+4x$ در فاصلهٔ (۲ و ۰) است .

تبصرهٔ ۲ـ وقتی که مختصات نقطهٔ M را برحسب پارامتر بدست می‌آوریم و پارامتر را حذف می‌کنیم، درحقیقت مکان هندسی نقطهٔ تلاقی دوخط متغیر موازی محورها را تعیین می‌کنیم .

بطورکلی معادلهٔ مکان هندسی نقطه، یا نقاط تلاقی دو منحنی که معادلهٔ آنها بستگی به یک پارامتر داشته باشد ، از حذف کردن پارامتر بین آن دو معادله بدست می‌آید ؛ واضح است که اگر یکی از این دو منحنی ثابت باشد (یعنی معادله‌اش شامل پارامتر نباشد) ، همان منحنی ثابت ، مکان هندسی است زیرا پارامتر هرچه باشد نقطه روی آن قرار دارد.

مثال ۱ـ برای تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ تلاقی دو خط

$\left\{\begin{array}{l}x\sin\alpha+y\cos\alpha=3\\ x\cos\alpha-y\sin\alpha=4\end{array}\right.$ ، باید α را بین دومعادله حذف کنیم .

برای این‌کار در این مثال کافی است دو طرف این دو معادله را مجذور وباهم جمع کنیم :

$$(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2+(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2=9+16$$

یا

$$x^2+y^2=25$$

مثال ۲ـ مکان هندسی نقطهٔ $M\left|\begin{array}{l}x=2\\ y=3\sin\alpha-1\end{array}\right.$ قطعه‌ای از خط $x=2$ ، محصور بین دوخط $y=2$ و $y=-4$ می‌باشد (چرا ؟) .

تقارن

۱۳ـ درهندسهٔ سال چهارم دیده‌اید که :

الف ـ دو نقطهٔ A و A' را قرینهٔ یکدیگر نسبت به خط (D) می‌گویند به شرط آنکه خط (D) عمودمنصف قطعه خط AA' باشد .

ب ـ خط (D) محور تقارن منحنی (C) است [یا منحنی (C) نسبت به خط (D) قرینه است] اگر تمام نقاط (C) ، دو بدو ، نسبت به خط (D) قرینهٔ یکدیگر باشند . به عبارت دیگر ، اگر قرینهٔ هر نقطهٔ اختیاری از منحنی (C) نسبت به (D) نقطهٔ دیگر از منحنی (C) باشد ، خط (D) محور تقارن منحنی (C) است .

ج ـ دو نقطهٔ M و M' را قرینهٔ یکدیگر نسبت به نقطهٔ O می‌گویند ، اگر O وسط قطعه خط MM' باشد .

د ـ نقطهٔ O مرکز تقارن منحنی (C) است [یا منحنی (C) نسبت بنقطهٔ O قرینه است] ، اگر تمام نقاط منحنی (C) نسبت به O، دوبدو

قرینهٔ یکدیگر باشند .

ه ـ هرگاه شکلی دارای دو محور تقارن متعامد (D_1) و (D_2)، باشد ، نقطهٔ تلاقی (D_1) و (D_2)مرکز تقارن‌آن شکل است .

۱۳ـ نقطه‌های قرینه نسبت به محورهای مختصات ومبدأ مختصات ـ دو نقطهٔ M و M' نسبت به محور عرضها قرینهٔ یکدیگر ند اگر عرضهای‌آن دومتساوی وطولهای‌آن دو، دوعدد قرینه باشند، مانند:

$$M'\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right. \quad [\text{و}] \quad M\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$$

دو نقطهٔ R و R' نسبت به محور طولها قرینهٔ یکدیگر ند اگر طولهای‌آن دو متساوی و عرضهای آن دو ، دوعدد قرینه باشند ، مانند:

$$R'\left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad R\left|\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right.$$

دونقطهٔ $P\left|\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right.$ و $P'\left|\begin{matrix}-3\\1\end{matrix}\right.$ که طولهای آنها باهم و عرضهایشان باهم قرینه‌اند ، نسبت به مبدأ مختصات قرینهٔ یکدیگر می‌باشند .

۱۴ ـ تقارن یك منحنی نست به محورهای مختصات و خطوط موازی آنها .

الف ـ تقارن نسبت به محور yها ـ منحنی نمایش تابع $y=x^4-3x^2+2$ را در نظر می‌گیریم . فرض می‌کنیم که M_1 و M'_1 نقاط به طول x_1 و $-x_1$ از این منحنی باشند . می‌بینیم‌که عرض هریك از این دو نقطه برابر $x_1^4-3x_1^2+2$ است یعنی M_1 و M'_1 قرینهٔ یکدیگر نسبت به محور $y'Oy$ می‌باشند . و چون اندازهٔ x_1 اختیاری است ، قرینهٔ هرنقطه از این منحنی نسبت به محور yها نقطهٔ دیگر از

همین منحنی می‌باشد . بنابراین محور yها محور تقارن منحنی مفروض است . از روی این مثال می‌بینیم :

شرط آنکه محور yها محور تقارن منحنی به معادلهٔ $y=f(x)$ باشد این است‌که اگر x را به $-x$ تبدیل‌کنیم ، اندازهٔ $f(x)$ تغییر نکند [دراین صورت می‌گویند $f(x)$ تابع زوج x است].

بخصوص هرکثیرالجمله از x که درآن نمایندهای x اعداد زوج باشند (مانند مثال فوق) تابع زوج x می‌باشد ومحور yها ، محور تقارن منحنی نمایش تغییرات آن است .

بطورکلی اگر یك معادلهٔ شامل x و y ، باتبدیل x آن به $-x$ ، تغییر نکند، منحنی نمایش‌آن معادله ، نسبت به محور yها قرینه است مانند $x^2+y^2-2y=0$.

ب ـ تقارن نسبت به یك خط موازی با محور yها ـ برای آنکه تحقیق کنیم خط $x=a$ محور تقارن یك منحنی است ، محورها را انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ $O_1\left|\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right.$ مبدأ جدید مختصات شود (یعنی محور yها روی خط مفروض $x=a$ قرار گیرد) و معادلهٔ منحنی را نسبت به دستگاه جدید بدست می‌آوریم* . اگر معادلهٔ جدید با تغییر X به $-X$ تغییر نکند ، خط مفروض محور تقارن منحنی است .

ج ـ تقارن یك منحنی نسبت به محور xها ـ با استدلالی شبیه به استدلال فوق دیده می‌شود که اگر یك معادلهٔ شامل x و y ، با تبدیل y آن به $-y$ تغییر نکند ، محور xها ، محور تقارن منحنی نمایش‌آن معادله است ، مانند : $y^2=2px$

---

* برای این‌کار ، درمعادلهٔ منحنی به جای x می‌گذاریم $X+a$.

د- تقارن نسبت به يك خط موازی محور xها - برای آنكه تحقیق‌كنیم كه خط $y=b$ محور تقارن يك منحنی است ، محورها را انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ $O_1\begin{vmatrix}0\\b\end{vmatrix}$ مبدأ جدید مختصات شود (یعنی محور xها روی خط مفروض $y=b$ قرار گیرد) ، و معادلهٔ منحنی را نسبت به دستگاه جدید بدست می‌آوریم* . اگر معادلهٔ جدید با تبدیل Y به $-Y$ تغییر نكند ، خط مفروض محور تقارن منحنی است .

۱۵- تقارن يك منحنی نسبت به مبدأ مختصات- منحنی نمایش تابع $y=x^3-3x$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌كنیم كه M_1 و M'_1 نقاط به طول x_1 و $-x_1$ از این منحنی باشند . می‌بینیم كه عرضهای این دو نقطه نیز دو عدد قرینه‌اند ، پس M_1 و M'_1 قرینهٔ یكدیگر نسبت به مبدأ مختصاتند . و چون اندازهٔ x_1 اختیاری است پس قرینهٔ هر نقطه از این منحنی نسبت به مبدأ مختصات ، نقطه‌ای دیگر از همین منحنی می‌باشد . بنابراین مبدأ مختصات مركز تقارن منحنی مفروض است . از روی این مثال می‌بینیم:

شرط آنكه مبدأ مختصات مركز تقارن يك منحنی به معادلهٔ $y=f(x)$ باشد این است كه اگر x را به $-x$ تبدیل‌كنیم y به $-y$ تبدیل شود [در این صورت می‌گویند $f(x)$ تابع فرد x است] .

بخصوص هر كثیرالجمله از x كه در آن نماینده‌های x اعداد فرد باشند (مانند مثال فوق) ، تابع فرد x است ومبدأ مختصات مركز تقارن منحنی نمایش تغییرات آن است .

* در معادلهٔ منحنی به جای y می‌گذاریم $Y+b$.

بطور كلی اگر يك معادلهٔ شامل x و y ، با تبدیل x آن به $-x$ و y آن به $-y$ تغییر نكند ، مبدأ مختصات مركز تقارن منحنی نمایش تغییرات آن معادله است ، مانند $x^2-2xy-2y^2=5$.

۱۶- تقارن يك منحنی نسبت به يك نقطه - برای آنكه تحقیق كنیم نقطهٔ $A(a$ و $b)$ مركز تقارن منحنی است ، محورها را انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ A مبدأ جدید مختصات شود و معادلهٔ منحنی را نسبت به دستگاه جدید بدست می‌آوریم* . اگر معادلهٔ جدید با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نكند ، نقطهٔ مفروض مركز تقارن منحنی است .

مثلاً نقطهٔ $C\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix}$ مركز تقارن منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x^2-3x+4}{x-1}$ است ، زیرا اگر به جای x و y بترتیب $X+1$ و $Y-1$ بگذاریم ، یعنی محورها را انتقال دهیم تا C مبدأ جدید مختصات شود ، معادلهٔ منحنی چنین می‌شود: $Y=\frac{X^2+2}{X}$ و معادلهٔ اخیر با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نمی‌كند .

می‌توان نیز منحنی را باخط غیرمشخص مار بر C قطع‌كرد و ثابت كرد كه نقاط تقاطع دو بدو چنانندكه C وسط آنهاست .

تمرین

۱- معادلات اضلاع AB ، BC و CA از مثلث ABC بترتیب

* برای این كار ، در معادلهٔ منحنی به جای x و y بترتیب $X+a$ و $Y+b$ می‌گذاریم .

عبارتند از : $5y+2x-9=0$ و $5x+2y+6=0$ و $2y-3x+4=0$. اولاً مختصات رئوس این مثلث را حساب کنید . ثانیاً مساحت این مثلث را تعیین‌کنید . ثالثاً اگر محورها را به‌رأس A (مبدأ جدید مختصات) انتقال دهیم معادلات اضلاع به‌چه صورت‌خواهد شد؟ مختصات جدید هررأس را بنویسید .

۲ــ اولا مطلوب است تعیین مقدار m بقسمی که نقطهٔ تقاطع خطوط $y=x+5$ و $y=mx-3$ برروی نیمساز $x'oy$ باشد . ثانیاً اگر محورهای مختصات به‌نقطهٔ تقاطع این دو خط انتقال یابند ، معادلات این دو خط را بنویسید .

۳ــ خط oM با نیم‌خط ox زاویهٔ 60° تشکیل داده است ، از نقطهٔ M که به‌فاصلهٔ ۲ از o قرار دارد، خطی بر oM عمود شده است. معادلهٔ این خط را بنویسید .

۴ــ مختصات متحرك M برحسب زمان t چنین است : $x=2t-1$ و $y=t+1$. معادلهٔ مسیر متحرك M را بدست‌آورید وآن را رسم‌کنید.

۵ــ $A\left|\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$ رئوس یك مثلث می‌باشند . اولا ــ تانژانت زوایای این مثلث را حساب‌کنید . ثانیاً ــ تحقیق‌کنیدکه سه ارتفاع در یك نقطه متقاطعند ومختصات نقطهٔ تلاقی آنها را حساب‌کنید.

۶ــ در معادلات : $ax-(a-2)y-2(a-1)=0$ و $2ax-(a-3)y-a=0$ ، مطلوب است تعیین مقدار a برای اینکه ، اولاً ــ دوخط نمایش آنها موازی هم باشند . ثانیاً ــ دوخط برهم عمودباشند. در حالت مخصوص $a=-1$ ، تانژانت زاویهٔ بین دو خط را حساب‌کنید .

۷ــ دو محور عمود برهم $x'ox$ و $y'oy$ و نقطهٔ ثابت A به طول ۱ واقع بر روی ox مفروض است . نقطـهٔ اختیاری B را بر روی oy فرض می‌کنیم و AC را دنبال oA برابر oB جدا می کنیم . از نقاط B و C دو

خط بردو محور عمود می‌کنیم تا یکدیگررا در نقطهٔ M قطع‌کنند . اولاً ــ مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ M وهمچنین مکان هندسی نقطهٔ F محل تلاقی اقطارمستطیل OBMC وقتی‌که B برروی oy حرکت‌کند . ثانیاً ــ ثابت کنیدکه عمود منصف قطعه خط BC همواره از نقطهٔ ثابتی که آن را تعیین می‌کنید می‌گذرد .

۸ــ معادلهٔ یك منحنی نسبت به دستگاه xoy چنین است :

$$x^2-5y^2-4xy-16x-22y-5=0$$

اگر محورهای مختصات را انتقال دهیم تامبدأ مختصات جدید به وضع $O'\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$ در آید ، مطلوب است معادلهٔ همان منحنی نسبت به محورهای جدید مختصات .

۹ــ نقاط $A\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}3\sin\alpha-1\\6\cos\alpha+3\end{matrix}\right.$ رئوس یك مثلث می ـ باشند. تعیین‌کنید مکان هندسی نقطهٔ G محل‌تلاقی سه میانهٔ مثلث‌را وقتی‌که α جمیع مقادیر ممکنه را اختیار می‌کند.

۱۰ــ تحقیق‌کنیدکه خط $x=2$ محور تقارن منحنی زیراست :

$$y=x^2-4x+3$$

۱۱ــ تحقیق‌کنیدکه خط $y=-1$ محور تقارن منحنی زیراست:

$$x^2+y^2+2y-4=0$$

۱۲ــ تحقیق‌کنیدکه نقطهٔ $O'\left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی زیر است :

$$xy-2y+7=0$$

۱۳ــ مطلوب است معادلهٔ مکان هندسی نقاطی‌که به فاصلهٔ R از نقطهٔ C (a و b) قرار دارند .

۱۴ــ مطلوب است مکان هندسی نقاط M(x و y) که از آنجا قطعه خط AB به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود : A(R و ۰) و B(−R و ۰)

۱۵ـ مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ $M(x \text{ و } y)$ که به یك فاصله از دوخط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ باشد .

۱۶ـ می‌دانیم‌که قوت یك نقطهٔ M که به فاصلهٔ d از C ، مرکز دایرهٔ به شعاع R قرار دارد ، نسبت به‌آن دایره ، برابر d^2-R^2 است . مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ $M(x \text{ و } y)$ که‌نسبت به دودایرهٔ (C) و (C') دارای یك قوت باشد . بافرض اینکه مرکز این دوایر $C(a \text{ و } b)$ و $C'(a' \text{ و } b')$ وشعاع آن دو بترتیب R و R' باشد .

۱۷ـ ثابت‌کنیدکه اگر معادلهٔ یك منحنی نسبت به x و y از درجهٔ دوم باشد، شرط لازم وکافی‌برای اینکه مبدأ مختصات مرکزتقارن‌آن منحنی باشد این است‌که معادله ، شامل جمل درجهٔ اول نباشد .

۱۸ـ تحقیق کنیدکه منحنی‌نمایش تابع $y=x^2+4x-1$ دارای محور تقارنی است موازی محور yها ، معادلهٔ آن محور تقارن را بنویسید .

۱۹ـ تحقیق‌کنیدکه منحنی نمایش $y^2-4x-2y+1=0$ دارای محور تقارنی به موازات محور xهاست، معادلهٔ آن محور تقارن راپیداکنید.

۲۰ـ تحقیق‌کنیدکه منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^2-4x}{x+1}$ دارای مرکز تقارن است و مختصات آن را پیدا کنید .

۲۱ـ تحقیق‌کنیدکه منحنی‌نمایش تابع $x^2-2y^2+4x+2y-1=0$ دارای محورهای تقارن به موازات محورهای مختصات است و معادلات آنها را بنویسید. آیا منحنی فوق ، مرکزتقارن نیزدارد ؟

۲۲ـ مکان هندسی نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l} x=\frac{1-m}{1+m} \\ y=2m \end{array}\right.$ را بدست‌آورید ومختصات مرکز تقارن این مکان را تعیین‌کنید .

۲۳ـ اولاً مکان هندسی نقطهٔ $P\left|\begin{array}{l} x=\frac{2t}{1+t^2} \\ y=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right.$ را پیدا کنید . ثانیاً

معادلهٔ محورهای تقارن و مختصات مرکز تقارن منحنی نمایش مکان هندسی P را پیداکنید .

۲۴ـ مکان هندسی نقطهٔ $M\left|\begin{array}{l} x=\frac{1+\cos t}{\cos t} \\ y=\operatorname{tg} t \end{array}\right.$ را پیداکنید .

۲۵ـ مکان هندسی نقطهٔ $D\left|\begin{array}{l} x=\operatorname{cotg}\alpha \\ y=\frac{1}{\cos\alpha} \end{array}\right.$ را پیداکنید .

فصل دوم

کلیات راجع به توابع یك متغیر

تعاریف

۱۷ـ متغیر ـ کمیتی راکه بتواند اندازه‌های مختلف اختیارکند **متغیر**می‌گویند. مثل قیمت خواربار یادرجهٔ حرارت یاتعداد شاگردانی که هرروز درمدرسه حاضر می‌شوند .

۱۸ـ بینهایت ـ هرگاه متغیر x طوری تغییر کندکه از هرعدد مثبت بزرگی بزرگتر شود ، می‌گوییم x به $+\infty$ نزدیك می‌شود و می‌نویسیم : $x \to +\infty$ یا $x = +\infty$. از روی این تعریف دیده می‌شود که $+\infty$ جانشین یك عدد نیست هرقدر هم‌آن عدد بزرگ‌گرفته شود.

و نیز هرگاه اندازهٔ متغیر x بتواند از هر عدد منفی کوچکتر گرفته شود ، می‌گوییم x به $-\infty$ نزدیك می‌شود و می‌نویسیم : $x \to -\infty$ یا $x = -\infty$.

۱۹ـ فاصله ـ اگرعدد a کوچکتر از عدد b باشد ، تمام عددهای میان a و b و خود آن دو عدد را می‌گوییم در **فاصلهٔ** از a تا b قرار دارند . فاصلهٔ از a تا b را چنین نمایش می‌دهیم :

$$(a , b)$$

برحسب قرارداد خود دو عدد a و b نیز در این فاصله می‌باشند

(مگر اینکه مستثنی شوند) پس هرگاه گفتیم اندازهٔ x متعلق به فاصلهٔ (a ، b) است مثل این استکه بنویسیم :

$$a \leqslant x \leqslant b$$

تفاضل b—a **دامنهٔ** فاصلهٔ (a ، b) یا طول‌آن نامیده می‌شود .

فاصلهٔ تغییرات ـ اگرمتغیر x چنان تغییر کندکه a و b ($a < b$) و اعداد مابین‌آنها را بگیرد ، می‌گوییم‌که فاصلهٔ تغییرات x ، (a ، b) است یا اینکه x درفاصلهٔ (a ، b) تغییرمی‌کند . اگربخواهیم‌خود a و b را مستثنی‌کنیم ، می‌گوییم‌که x درداخل فاصلهٔ (a ، b) تغییرمی‌کند؛ مثل این استکه بنویسیم :

$$a < x < b$$

اگر متغیر x چنان تغییر کندکه b و تمام مقدارهای بزرگتر از b را بگیرد ،گوییم **فاصلهٔ تغییرات** x ، ($b , +\infty$) است . همچنین اگر x چنان تغییر کندکه a و کلیهٔ مقدارهای کوچکتر از a را بگیرد گوییم فاصلهٔ تغییرات x ، ($-\infty , a$) می‌باشد. و اگرمتغیر x چنان تغییر کندکه هراندازهٔ دلخواهی را بگیرد ، گوییم فاصلهٔ تغییرات آن ، $(-\infty , +\infty)$ است.

۲۰ـ تابع یك متغیر ـ اگر اندازهٔ متغیر y بستگی به اندازهٔ متغیر دیگری مانند x داشته باشد ، y را تابع x می‌نامند . از این رو **یکی از راههای نمایش دادن تابع y از متغیر** x این است که یك تساوی بنویسیم‌که در یك طرف‌آن y (تابع) و در طرف دیگر عبارتی شامل x

(متغیر) باشد . مانند :

$$y=۳x-۵ \quad و \quad y=۲x^۲+\frac{۱}{۲}x+۱ \quad و \quad y=\sqrt{x^۲-۴}$$

بطورکلی اگر y تابع x باشد ، آن را چنین نمایش می‌دهیم :

$$y=f(x)$$

شکل f معلوم می‌دارد که چه عملیاتی باید روی اندازهٔ x انجام داده شود تا اندازهٔ y نظیر آن بدست آید . مثلاً اگر $f(x)$ به شکل $۲x^۲-\frac{۱}{۲}x+۱$ باشد ، داریم: $f(۵)=۲\times۵^۲-\frac{۵}{۲}+۱=۴۸\frac{۱}{۲}$ و $f(\alpha)=۲\alpha^۲-\frac{\alpha}{۲}+۱$ ؛ واگر $۲x-۳x^۳$ را $g(x)$ بنامیم، داریم : $g(۲)=۲\times۲-۳\times۲^۳=-۲۰$. ممکن است که اندازهٔ یك تابع در ازای همهٔ اندازه‌های متغیر محاسبه پذیر باشد ، مانند :

$$y=۲x+۵ \quad و \quad y=x^۳-۲x^۲ \quad و \quad y=\frac{۱}{x^۲+۱}$$

و ممکن است‌که یك تابع درازای همهٔ اندازه‌های متغیر محاسبه‌ـ پذیر باشد مگر در ازای یك یا چند اندازهٔ مخصوص متغیر . مانند $y=\frac{۱}{x}$ که در ازای همهٔ اندازه‌های x محاسبه پذیراست جز در ازای $x=۰$ یا $y=\frac{v+۱}{(v-۱)(v+۳)}$ که در ازای همهٔ اندازه‌های v محاسبه پذیر است جز در ازای $v=۱$ و $v=-۳$. بالاخره ممکن است یك تابع فقط هنگامی محاسبه پذیر باشد که متغیر در فاصله‌های معینی تغییر نماید ، مانند $y=\sqrt{۴-x^۲}$ که فقط وقتی محاسبه پذیر

است که متغیر در فاصلهٔ $(-۲ ، +۲)$ تغییر کند . یا $y=\sqrt{x^۲-۴}$ که اگر متغیر درفاصلهٔ $(-\infty ، -۲)$ یا درفاصلهٔ $(+۲ ، +\infty)$ تغییر نماید ، محاسبه پذیر است و در فاصلهٔ $(-۲ ، ۲)$ محاسبه پذیر نیست. و تابع $y=\sqrt{x+۱}$ وقتی محاسبه پذیر است‌که متغیر درفاصلهٔ $(-۱ ، +\infty)$ تغییرکند .

۲۱ـ تابع معیّن ـ تعریف ـ یك تابع از متغیر x را در فاصلهٔ $(a ، b)$ معیّن گوییم به شرط اینکه بتوان اندازهٔآن را به‌ازای هریك از مقادیر x ، که متعلق به این فاصله است ، حساب‌کرد .

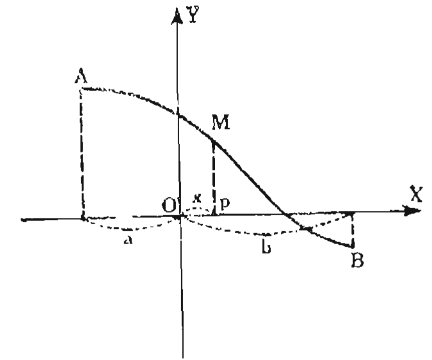
بنا برآنچه‌گفته شد تابع $y=x^۳-۲x^۲$ و بطور کلی همهٔ تابع‌ـ هایی‌که برحسب متغیر ، چند جمله‌ای باشند در فاصلهٔ $(-\infty ، +\infty)$ معین هستند . تابع $y=\sqrt{۴-x^۲}$ فقط در فاصلهٔ $(-۲ ، +۲)$ معین است وتابع $y=\frac{۱}{x}$ به ازای جمیع مقادیر متغیر معین و فقط به ازای $x=۰$ **نامعیّن** است .

۲۲ـ نمایش هندسی تغییرات یك تابع ـ اگر تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $(a ، b)$ معین باشد ، در ازای هریك از اندازه‌های x مانند $x_۰$ ، $(a<x_۰<b)$ ، یك اندازه برای y مانند $y_۰$ بدست می‌آید.می‌توان این دو مقدار نظیر $x_۰$ و $y_۰$ را مختصات نقطه‌ای مانند M گرفت $M(x_۰ ، y_۰)$ ؛ حال اگر به x همهٔ اندازه‌های فاصلهٔ $(a ، b)$ را بدهیم نقطه‌های بیشماری مانند M بدست می‌آیندکه درحالت‌کلی مکان‌آنهاقوسی از منحنی است. واضح است‌که این قوس بایك خط دلخواه موازی محور

$y'y$ بیش از یك نقطهٔ برخورد ندارد زیرا به ازای هر x واقع در فاصلهٔ (a , b) بیش ازیك مقداربرای y یافت نمی‌شود . این‌قوس را **منحنی نمایش هندسی تغییرات** تابع مفروض در فاصلهٔ (a , b) می‌گویند .

به‌عبارت‌دیگرمنحنی‌نمایش‌تغییرات تابع $y=f(x)$ درفاصلهٔ (a , b) ، منحنی C (یاخطی) است‌که مختصات جمیع نقاطش درمعادلهٔ $y=f(x)$ صدق‌کند . معادلهٔ $y=f(x)$ معادلهٔ منحنی C نامیده می‌شود .

توجه‌کنید ! در علوم‌آزمایشی ، مانند فیزیك ، معمولاً به جای آنکه عبارت یك تابع به حسب متغیر معلوم باشد تابع را به وسیلهٔ یك منحنی‌یا نمودارمشخص می‌کنند. مثلاً اگر A و B دو نقطه به طولهای a و b از صفحهٔ xoy باشند $(a<b)$ وقوس دلخواهی از A به B چنان بکشیم‌که هر خط دلخواه‌موازی‌محور $y'y$ بیش از یك نقطهٔ برخورد باآن قوس نداشته باشد ، پیداست‌که می‌توان این منحنی را جانشین عبارت تابع برحسب متغیر x دانست [یعنی جانشین $y=f(x)$] زیرا درازای هریك ازاندازه‌های x که در فاصلهٔ (a , b) گرفته شود از روی منحنی فقط یك اندازه برای y حساب می‌شود. مثلاً اگر $\overline{OP}=x$ باشد ، y برابر است با $\overline{PM}$ (اندازهٔ جبری $\overrightarrow{PM}$ روی محور y ها) .



حد

۲۳ـ حد متغیر ـ می‌گوییم حد متغیر x عدد ثابت a است وقتی که x بتواند بی‌اندازه به a نزدیك شود وهمواره نزدیك به‌آن‌باقی‌بماند.

به اصطلاح ریاضی می‌گویند : **حد متغیر x عدد ثابت a است وقتی که قدر مطلق $a-x$ ، $|a-x|$ ، از هر عدد مثبت کوچك دلخواهی مانند ε (می‌خوانند اپسیلن) کوچکتر شود و همواره‌کوچکتر ازآن بماند .**

۲۴ـ حد تابع ـ می‌گوییم وقتی که متغیر x به سمت a میل می‌کند ، حد تابع $f(x)$ عدد ثابت b است اگر به ازای مقادیری از x بسیار نزدیك به a ، مقادیری بسیار نزدیك به b برای تابع پیدا شود .

مثلاً حد تابع $y=x^2-2x$ وقتی که $x\to 1$ (x به سمت ۱ میل کند) می‌شود ۱− . زیرا اگر x را بسیار نزدیك به ۱ بگیریم اندازهٔ y بسیار نزدیك به ۱− خواهد شد . به اصطلاح ریاضی می‌گویند :

حدتابع $f(x)$ وقتی‌که x به‌سمت عددی مانند a میل‌کند عددثابت b است، اگر به ازای عدد مثبت کوچك دلخواه ε بتوان عدد مثبت‌کوچکی مانند ξ یافت بطوری که از نامساوی $|x-a|<\varepsilon$ نامساوی $|f(x)-b|<\xi$ نتیجه شود . در این صورت می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

[و می‌خوانیم حد $f(x)$ وقتی‌که x به سمت a میل‌کند برابر b است] .

توجه‌کنید ! ممکن است هنگامی که x به a نزدیك می‌شود تابع فقط در ازای xهای بزرگتر از a (یا کوچکتر از a) محاسبه پذیر باشد ، مانند $y_1=\sqrt{x-2}$ که در ازای x های کوچکتر از ۲

محاسبه پذیر نیست و $y_2=\sqrt{2-x}$ که تنها در ازای x های کوچکتر از ۲ محاسبه پذیر است . چنانکه می‌بینید حد y_1 و y_2 هنگامی که x به ۲ نزدیك می‌شود برابر صفر است . در y_1 ، x را بایدکوچك‌کرد تا به ۲ نزدیك شود و در y_2 ، x را باید بزرگ‌کرد تا به ۲ نزدیك شود. اما درتابع $y=x^2-2x$ می‌توان x را بزرگ کرد تا به ۱ برسد یاکوچك‌کرد تا به ۱ برسد .

می‌گوییم هنگامی که متغیر بی‌اندازه بزرگ می‌شود ، حد تابع آن عدد b است ، اگر مقدار تابع درازای مقادیر بسیار بزرگ از متغیر، بی‌اندازه به b نزدیك شود . به اصطلاح ریاضی می‌گویند : وقتی‌که x بی‌اندازه بزرگ می‌شود ، **حد تابع f (x) عدد b است ، اگر بتوان عدد مثبت بزرگی مانند A یافت چنانکه در ازای همهٔ اندازه‌های x بزرگتر از A قدرمطلق f (x)−b از یك عدد کوچك دلخواهی مانند δ کوچکتر باشد .**

در این صورت می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$$

می‌گوییم وقتی‌که متغیر بی‌اندازه‌کوچك می‌شود حد تابع آن عدد b است اگر مقدار تابع در ازای مقادیر بسیار کوچك از متغیر بی‌اندازه به b نزدیك شود. به اصطلاح ریاضی می‌گویند : **حد تابع f (x) درازای $x=-\infty$ عدد b است اگربتوان عدد مثبت بزرگی مانند A یافت چنانکه در ازای همهٔ اندازه‌های x کوچکتر از −A قدر مطلق f (x)−b از یك عددکوچك دلخواهی مانند δ کوچکتر باشد .** در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

۲۵ـ قضایای مربوط به‌حد ـ دربارهٔ حدها ، همواره قضیه‌های

زیر بکار می‌رود وما دراینجا آنهارا بدون اثبات می‌پذیریم .

قضیهٔ ۱ـ حد مجموع ـ اگر a و b حدهای دو تابع f (x) و g (x) باشند ، هنگامی‌که x بی‌اندازه به x_0 نزدیك می‌شود یا هنگامی که x بی‌اندازه بزرگ $(+\infty)$ یا بی‌اندازه کوچك $(-\infty)$ می‌شود ، مجموع f (x)+g (x) وتفاضل f (x)−g (x) نیزدرآن هنگام دارای حدهایی خواهند بود وآن حدها بترتیب عبارتند از: a+b و a−b .

قضیهٔ ۲ـ حد حاصل ضرب ـ اگر a و b حدهای دوتابع f (x) و g (x) باشند، هنگامی‌که x بی‌اندازه به x_0 نزدیك می‌شود یاهنگامی‌که x بی‌اندازه بزرگ $(+\infty)$ یا بی‌اندازه‌کوچك $(-\infty)$ می‌شود ، حاصل ضرب f(x).g(x) نیز در آن هنگام دارای حدی است برابر حاصل ضرب a.b .

قضیهٔ ۳ـ حد خارج قسمت ـ چنانچه حد f (x) برابر a و حد g (x) برابر b باشد ، حد خارج قسمت f (x) بر g (x) برابر $\frac{a}{b}$ است به شرط‌آنکه b صفر نباشد .

از این قضیه نتیجه می‌گیریم که حد معکوس یك تابع ، معکوس حدآن است به شرط اینکه حدآن تابع صفر نباشد .

قضیهٔ ۴ـ حد ریشهٔ mام ـ چنانچه وقتی x بی‌اندازه نزدیك به x_0 یا بی‌اندازه بزرگ یا بی‌اندازه کوچك شود ، حد f (x) برابر a باشد $(a\geq 0)$ ، ریشهٔ mام f (x) نیز دارای حدی است‌که همان ریشهٔ mام a است .

پیوستگی

۲۶ـ تابع متصل و تابع منفصل ـ می‌گوییم تابع $y=f(x)$ در ازای $x=a$ متصل است (پیوسته است)، هرگاه اولاً این تابع در ازای $x=a$ محاسبه پذیر ومعین باشد؛ ثانیاً حداین تابع وقتی‌که $x\to a$ برابر $f(a)$ باشد. درغیر این صورت تابع را در ازای $x=a$ **منفصل** می‌خوانیم.

می‌گوییم تابع $y=f(x)$ درفاصلهٔ (a, b) متصل‌است، هرگاه در ازای هریك از اندازه‌های x که متعلق به این فاصله است متصل باشد. مثلاً تابع $1-x^2$، و بطور کلی هر چند جمله‌ای از x در فاصلهٔ $(-\infty, +\infty)$، یعنی در ازای جمیع مقادیر x، متصل است. تابع $\sqrt{4-x^2}$ فقط در فاصلهٔ $(-2, +2)$ متصل می‌باشد. و تابع $\frac{1}{x-1}$ در ازای همهٔ اندازه‌های x، بجز $x=1$، متصل است و در ازای $x=1$ که محاسبه پذیر نیست **منفصل** است.

تبصره ـ هرگاه تابعی به وسیلهٔ یك قوس منحنی پیوسته مانند قوس AB از شکل شمارهٔ ۲۲ تعریف شده باشد (A به طول a و B به طول b و $a<b$)، واضح است که خود تابع نیز در فاصلهٔ (a, b) پیوسته‌است. زیرا اگر x بی‌اندازه به $\overline{OP}$ نزدیك شود، تابع بی‌اندازه به $\overline{PM}$ نزدیك خواهد شد.

۲۷ـ قضایای مربوط به پیوستگی ـ از روی قضیه‌های راجع به حدها قضیه‌های زیر برای تابعهای پیوسته بدست می‌آید:

قضیهٔ ۱ـ اگر چند تابع در یك فاصله پیوسته باشند، مجموع

جبری آنها نیز درآن فاصله، تابعی است پیوسته.

قضیهٔ ۲ـ اگرچند تابع دریك فاصله پیوسته باشند، حاصلضرب آنها نیز درآن فاصله، تابعی است پیوسته.

قضیهٔ ۳ـ اگردوتابع $f(x)$ و $g(x)$ دریك فاصله پیوسته باشند، $\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز در آن فاصله پیوسته است به شرط اینکه $g(x)$ در ازای هیچیك از مقادیر x متعلق به‌آن فاصله صفر نباشد.

قضیهٔ ۴ـ ریشهٔ n ام هر تابع پیوسته، تابعی است پیوسته (در حالتی که ریشهٔ n ام موهومی شود از بحث ما در این کتاب خارج است).

تعیین جهت تغییرات تابع

۲۸ـ تابع صعودی و تابع نزولی ـ تابع $y=f(x)$ رادرفاصلهٔ (a, b) **صعودی** می‌گوییم هنگامی‌که جهت تغییرات تابع y با جهت تغییرات متغیر x دراین فاصله یکی باشد. یعنی اگر x را در این فاصله ترقی دهیم y هم ترقی کند و اگر x را تنزل دهیم y هم تنزل کند. به عبارت دیگر اگر $y_1=f(x_1)$ و $y_2=f(x_2)$ مقادیر تابع به ازای $x=x_1$ و $x=x_2$ باشند، چنانچه در ازای همهٔ مقادیر x_1 و x_2 متعلق به فاصلهٔ (a, b)، y_2-y_1 و x_2-x_1 متحدالعلامه باشند یعنی: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}>0$، تابع در فاصلهٔ (a, b) صعودی است.

تابع $y=f(x)$ را در فاصلهٔ (a, b) **نزولی** می‌گوییم هنگامی که جهت تغییرات تابع y با جهت تغییرات متغیر x در این فاصله یکی

نباشد . یعنی اگر x را در این فاصله ترقی دهیم y تنزل کند یا اگر x را در این فاصله تنزل دهیم y ترقی کند . به عبارت دیگر اگر $y_1=f(x_1)$ و $y_2=f(x_2)$ مقادیر نظیر x_1 و x_2 از تابع باشد، چنانچه به ازای جمیع مقادیر x_1 و x_2 متعلق به فاصلهٔ (a , b) ، y_2-y_1 و x_2-x_1 مختلف‌العلامه باشند یعنی : $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<0$ ، تابع در فاصلهٔ (a , b) نزولی است. مقصود از **تعیین جهت تغییرات یك تابع** این است‌که معین‌کنیم‌که وقتی‌که متغیر جمیع مقادیر ممکنه را در حال ترقی اختیارکند ، تابع چگونه تغییر می‌کند. یعنی به‌ازای چه مقادیری از متغیر ، تابع صعودی ، و به ازای چه مقادیری از آن ، تابع نزولی است .

مشتق

۲۹ ـ تعریف مشتق ـ مشتق یك تابع در ازای یکی از اندازه‌های متغیر ، حد نسبت نمو تابع است به نمو متغیر، هرگاه نمو متغیر بی‌اندازه به صفر نزدیك شود .

تعبیر هندسی ـ اگر(C)منحنی نمایش‌تغییرات تابع $y=f(x)$ باشد ، ضریب زاویه‌ای خط مماس برمنحنی در نقطه‌ای مانند M به طول x_0 از آن منحنی، برابر اندازهٔ مشتق y نسبت به x است در ازای x_0 .

محاسبهٔ مشتق ـ مشتق بعضی از توابع سادهٔ جبری و مثلثاتی را که درجبر کلاس پنجم حساب‌کرده‌ایم ذیلاً برای یادآوری می‌نویسیم :

۱ـ مشتق $y=k$ (k عدد ثابت) می‌شود $y'=0$

۲ـ » $y=x$ » $y'=1$

۳ـ مشتق $y=x^m$ می‌شود $y'=mx^{m-1}$

۴ـ » $y=\sqrt{x}$ » $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۵ـ » $y=\sin x$ » $y'=\cos x$

۶ـ » $y=\cos x$ » $y'=-\sin x$

۷ـ » $y=\mathrm{tg}x$ » $y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x$

۸ـ » $y=\mathrm{cotg}x$ » $y'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\mathrm{cotg}^2 x)$

۳۰ـ قضایای مربوط به مشتق ـ از روی قضیه‌های زیر (که اثبات آنها را در جبر پنجم دیده‌ایم) می‌توان مشتق یك تابع را بآسانی از روی مشتق تابعهای ساده‌تر،که به بعضی از آنها در بالا اشاره شد ، حساب‌کرد :

قضیهٔ ۱ـ مشتق مجموع جبری چند تابع ، برابراست با مجموع جبری مشتقهای آن توابع . یعنی اگر $y=u+v+w$ (u ، v و w توابعی از x هستند که نسبت به x مشتق دارند) ، داریم :

$$y'=u'+v'+w'$$

مثال ۱ : مشتق $y=x^3+x^2-x+1$ می شود :

$$y'=3x^2+2x-1$$

مثال ۲ : مشتق $y=\sin x+\cos x$ می‌شود :

$$y'=\cos x-\sin x$$

قضیهٔ ۲ـ مشتق حاصل ضرب دو تابع نسبت به یك متغیر ، برابر است با حاصل ضرب تابع اول در مشتق تابع دوم باضافهٔ حاصل ضرب تابع دوم درمشتق تابع اول (مشروط براینکه این‌تابعها مشتق داشته باشند).

یعنی اگر $y=u.v$ ، داریم :

$$y'=u.v'+v.u'$$

مثال ۱ : مشتق $y=(x^2+1)(x^3+x-1)$ می‌شود :

$$y'=(x^2+1)(3x^2+1)+(x^3+x-1)(2x)$$
$$=5x^4+6x^2-2x+1$$

مثال ۲ : مشتق $y=\sin x.\cos x$ می‌شود :

$$y'=\sin x(-\sin x)+\cos x.\cos x=\cos^2x-\sin^2x$$

نتیجهٔ ۱ـ اگر داشته باشیم $y=u.v.w$ (u ، v و w توابعی از x هستند) ، مشتق آن می‌شود :

$$y'=u'.v.w+v'.u.w+w'.u.v$$

نتیجهٔ ۲ـ مشتق حاصل ضرب یك تابع دریك عدد ثابت برابراست با حاصل ضرب این عدد ثابت در مشتق آن تابع . یعنی اگر $y=ku$ (k عدد ثابت و u تابع x است) ، مشتق‌آن می‌شود :

$$y'=k.u'$$

مثال ۱ : مشتق $y=3x^3$ می‌شود : $y'=3(3x^2)=9x^2$

مثال ۲ : مشتق $y=2\cos x$ می‌شود : $y'=2(-\sin x)=-2\sin x$

قضیهٔ ۳ـ مشتق توان n ام یك تابع (خواه n مثبت ، منفی ، صحیح یاکسری باشد) ، **مساوی است با n برابر حاصل ضرب مشتق آن تابع در توان ۱ـn ام آن تابع** . یعنی اگر $y=u^n$ ، مشتق‌آن می‌شود :

$$y'=nu'.u^{n-1}$$

مثال ۱ : مشتق $y=(x^2+3x)^3$ می‌شود:

$$y'=3(2x+3)(x^2+3x)^2$$

مثال ۲ : مشتق $y=(2x)^{-2}$ می‌شود :

$$y'=-2\times2\times(2x)^{-3}=-4(2x)^{-3}$$

مثال ۳ : مشتق $y=\sqrt[5]{x^2-2x}=(x^2-2x)^{\frac{1}{5}}$ می‌شود :

$$y'=\frac{1}{5}\times(2x-2)\times(x^2-2x)^{\frac{-4}{5}}=\frac{2(x-1)}{5\sqrt[5]{(x^2-2x)^4}}$$

مثال ۴ : مشتق $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{\frac{-2}{3}}$ می‌شود :

$$y'=-\frac{2}{3}\times1\times x^{\frac{-5}{3}}=-\frac{2}{3}x^{\frac{-5}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

مثال ۵ : مشتق $y=2\operatorname{tg}^2x$ می‌شود :

$$y'=2\times2\times(1+\operatorname{tg}^2x)\times\operatorname{tg}x=4\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)$$

قضیهٔ ۴ـ مشتق خارج قسمت دو تابع مساوی است با مشتق صورت ضرب در مخرج ، منهای مشتق مخرج ضرب درصورت تقسیم برمربع مخرج.

یعنی اگر فرض‌کنیم‌که u و v تابعهایی دارای مشتق باشند، مشتق $y=\frac{u}{v}$ می‌شود :

$$y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$$

مثال : مشتق تابع $y=\frac{x^2+2x}{2x+3}$ چنین می‌شود :

$$y'=\frac{(2x+2)(2x+3)-2(x^2+2x)}{(2x+3)^2}=\frac{2x^2+6x+6}{(2x+3)^2}$$

۳۱ـ تابع تابع ومشتق آن ـ اگر y بصورت تابعی از u باشد، یعنی $y=f(u)$ ، و u خود نیز تابعی از x باشد ، یعنی $u=g(x)$ ، واضح است که y تابع x است ؛ y را **تابع تابع** x می‌نامند . مثل

$y=\frac{u^2+1}{u+2}$ که در آن $u=(x-1)^2$. برای محاسبهٔ مشتق y نسبت به x می‌نویسیم :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

اگر u تابعی پیوسته از x بوده و نسبت به x دارای مشتق باشد و اگر y نیز تابعی پیوسته از u بوده و نسبت به u دارای مشتق باشد ، هنگامی که Δx را نزدیك به صفر می‌گیریم ، Δu و Δy نیز نزدیك به صفر شده وحد $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ برابر u'_x (مشتق u نسبت‌به x) وحد $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ برابر y'_u (مشتق y نسبت به u) می‌شود . پس حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، هنگامی که Δx نزدیك به صفر می‌شود یا y'_x (مشتق y نسبت به x) برابر است باحاصل ضرب y'_u و u'_x یعنی :

$$y'_x=y'_u\times u'_x$$

بنابراین نتیجه می‌شود :

قضیه ـ اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد ، مشتق y نسبت به x برابر است بامشتق y نسبت به u ضرب در مشتق u نسبت به x .

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که اگر y تابع u و u تابع v و v تابع x باشد ، با شرط وجود مشتقهای y'_u ، u'_v و v'_x ، می‌توان مشتق y نسبت به x را از دستور زیر بدست آورد :

$$y'_x=y'_u\times u'_v\times v'_x$$

نتیجه ـ الف ـ چون مشتق $\sin x$ نسبت به x برابر $\cos x$ است ، مشتق $\sin u$ نسبت به u خواهد شد $\cos u$. پس به فرض اینکه u تابع x باشد مشتق $\sin u$ نسبت به x می‌شود $u'\cos u$ بنابراین :

$$y=\sin u \ ، \ y'=u'\cos u$$

مثال : مشتق $y=\sin 2x$ می‌شود :

$$y'=2\times\cos 2x=2\cos 2x$$

ب ـ همچنین می‌دانیم‌که مشتق $\cos u$ نسبت به u برابر $-\sin u$ است ، پس اگر u تابعی از x باشد مشتق $\cos u$ نسبت به x می‌شود : $-u'.\sin u$ یعنی :

$$y=\cos u \ ، \ y'=-u'\sin u$$

مثال: مشتق $y=\cos\frac{x}{2}$ می‌شود : $y'=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$

ج ـ مشتق $tg\, u$ نسبت به u برابر $\frac{1}{\cos^2 u}$ است . پس اگر u تابعی از x باشد ، مشتق $tg\, u$ نسبت‌به x می‌شود $\frac{u'}{\cos^2 u}$ یعنی :

$$y=tg\, u \ ، \ y'=\frac{u'}{\cos^2 u}=u'(1+tg^2 u)$$

مثال : مشتق $y=tg\, 3x$ می‌شود :

$$y'=\frac{3}{\cos^2 3x}=3(1+tg^2 3x)$$

د ـ مشتق $cotg\, x$ نسبت به u برابر $\frac{-1}{\sin^2 u}$ است . پس اگر

u تابعی از x باشد، مشتق $\cot g\, u$ نسبت به x می‌شود $\frac{-u'}{\sin^2 u}$ یعنی :

$$y=\cot g\, u \;,\; y'=\frac{-u'}{\sin^2 u}=-u'(1+\cot g^2 u)$$

مثال : مشتق $y=\cot g\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)$ می‌شود :

$$y'=\frac{-(-4)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)}=\frac{4}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)}=4\left[1+\cot g^2\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)\right]$$

۳۳ـ مشتقهای متوالی ـ در حالت کلی، مشتق یك تابع بستگی به اندازهٔ متغیر دارد پس خود تابعی است از متغیر که در حالت کلی دارای مشتق می‌باشد . مثلاً مشتق تابع $y=x^3-3x$ برابر است با $y'=3x^2-3$ که خود تابعی است از x که مشتق آن می‌شود $6x$.

مشتق مشتق تابع $y=f(x)$ را **مشتق دوم** آن تابع می‌نامند و آن را به y'' یا $f''(x)$ نمایش می‌دهند . بنا بر این برای محاسبهٔ مشتق دوم تابع $y=x^3-3x$ بترتیب داریم :

$$y'=3x^2-3$$
$$y''=6x$$

ممکن است که مشتق دوم یك تابع ، خود نیز تابعی ازمتغیر بوده نسبت به آن دارای مشتق باشد . چنانکه در مثال بالا مشتق دوم برابر $6x$ است که مشتق آن می‌شود ۶ . مشتق مشتق دوم را **مشتق سوم** می‌گویند و آن را به y''' (بخوانید y تی‌یرس tierce) یا $f'''(x)$ (بخوانید اف تی‌یرس x) نمایش می‌دهند . در مثال فوق‌که $y''=6x$ است داریم :

$$y'''=6$$

بطورکلی مشتق nام یك تابع ، مشتق مشتق $n-1$ام آن تابع است‌وآن را به $y^{(n)}$ یا $f^{(n)}$ (بخوانیدمشتق nام y یامشتق nام f) نمایش می‌دهند . مشتقهای اول ، دوم ، سوم ، ... و nام هر تابع را **مشتقهای متوالی** آن تابع می‌نامند .

مثال: مشتقهای متوالی $y=\sin x$ می‌شوند :

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=-\sin x=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

و بطور کلی :

$$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

همچنین مشتقهای متوالی $y=\cos x$ بترتیب چنین است :

$$y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=-\cos x=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y'''=\sin x=\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

و بطور کلی :

$$y^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

موارد استعمال مشتق

۳۳ـ الف ـ تعیین جهت تغییرات تابع ـ در جبر کلاس پنجم قضیهٔ زیر را ثابت کردیم :

قضیه ـ مشتق تابع درازای اندازه‌هایی از متغیر که تابع در ازای آنها صعودی است مثبت است (و یا اتفاقاً صفر) . و در ازای اندازه‌هایی از متغیر که تابع در ازای آنها نزولی است منفی است (یا اتفاقاً صفر). و بعکس اگر مشتق تابع در فاصله‌ای مثبت باشد تابع در آن فاصله صعودی است و اگر مشتق تابع در فاصله‌ای منفی باشد تابع در آن فاصله نزولی است .

با استفاده از این قضیه برای تعیین جهت تغییرات یك تابع کافی است که مشتق تابع را بدست آوریم و علامت آن را تعیین کنیم ، یعنی ببینیم که مشتق به ازای چه مقادیری از متغیر ، مثبت و به ازای چه مقادیری از متغیر ، منفی است . در فاصله‌ای که مشتق مثبت است ، تابع صعودی است و در فاصله‌ای که مشتق منفی است ، تابع نزولی است .

مثال : برای تعیین جهت تغییرات تابع $y=x^2-x$ علامت مشتق آن را که $y'=2x-1$ است تعیین می‌کنیم : $2x-1$ به ازای $x>\frac{1}{2}$ مثبت و به ازای $x<\frac{1}{2}$ منفی است ؛ بنابراین تابع $y=x^2-x$ به ازای $x>\frac{1}{2}$ صعودی و به ازای $x<\frac{1}{2}$ نزولی است .

۳۴ ـ ب ـ ماکزیمم و مینیمم ـ اگر تابع $y=f(x)$ در ازای $x=x_0$ متصل باشد می‌گوییم :

تابع y به ازای $x=x_0$ دارای ماکزیمم است وقتی‌که تابع در ازای

xهای کوچکتر از x_0 (و خیلی نزدیك به x_0) صعودی و در ازای xهای بزرگتر از x (وخیلی نزدیك به x_0) نزولی باشد ودر این صورت $f(x_0)$ را مقدار ماکزیمم تابع می‌نامیم .

همچنین تابع y به ازای $x=x_0$ دارای مینیمم است وقتی‌که تابع در ازای xهای کوچکتر از x_0 (و خیلی نزدیك به x_0) نزولی و در ازای xهای بزرگتر از x_0 (وخیلی نزدیك به x_0) صعودی باشد ودر این صورت $f(x_0)$ را مقدار مینیمم تابع می‌نامیم .

بنابر آنچه گفته شد برای تعیین ماکزیمم یا مینیمم یك تابع باید علامت مشتق تابع را تعیین کرد . به ازای هر اندازه‌ای از متغیر که مشتق تغییر علامت می‌دهد (بشرطی‌که تابع به ازای آن اندازه پیوسته باشد) تابع ماکزیمم یا مینیمم است . اگر تغییر علامت از + به − باشد تابع ماکزیمم و اگر از − به + باشد تابع مینیمم می‌باشد .

۳۵ـ ج ـ معادلهٔ مماس بر منحنی از نقطه‌ای واقع بر منحنی ـ

می‌دانیم که ضریب زاویه‌ای خط مماس بر منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ برابر به‌طول x_0 است با اندازهٔ مشتق تابع در ازای x_0 یعنی برابر است با $f'(x_0)$.

بنابر این معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $[x_0 , y_0]$ واقع در روی منحنی $[y_0=f(x_0)]$ چنین است :

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

مثال : می‌خواهیم معادلهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تابع : $y=3\cot g x-\cot g^3 x+1$ را در نقطهٔ به طول $x=\frac{\pi}{6}$ بنویسیم؛ داریم :

$$y_0=3\cot g\frac{\pi}{6}-\cot g^3\frac{\pi}{6}+1=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}+1=1$$

$$y' = -۳(۱+cotg^۲x)+۳cotg^۲x(۱+cotg^۲x) = ۳(۱+cotg^۲x)(cotg^۲x-۱)$$

$$y'_{\frac{\pi}{۶}} = ۳(۱+۳)\cdot(۳-۱) = ۲۴$$

پس معادلهٔ خط مماس می‌شود : $y-۱ = ۲۴\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)$

یا : $y - ۲۴x + ۴\pi - ۱ = ۰$

معادلهٔ مماس بر منحنی از نقطه‌ای واقع در خارج منحنی - فرض می‌کنیم که منحنی به معادلهٔ $y=f(x)$ و نقطهٔ مفروض P به مختصات a و b راداشته باشیم . هر خط که از P بر منحنی مماس شود کاملاً مشخص می‌شود، اگر نقطهٔ تماسش معلوم شود یا امتدادش در دست باشد و بر حسب آنکه بخواهیم نقطه (یا نقطه‌های) تماس مماس (یا مماسهای) مرسوم از P بر منحنی را بدست آوریم ، یا آنکه بخواهیم امتداد آن را پیدا کنیم دو طریقه بکار می‌بریم :

طریقهٔ اول - تعیین نقطهٔ تماس - فرض می‌کنیم نقطهٔ تماس $M(\alpha$ و $\beta)$ باشد [α و β در این رابطه صدق می‌کنند $\beta=f(\alpha)$] . می‌نویسیم که خط مماس بر منحنی در نقطهٔ M از نقطهٔ P می‌گذرد ؛ بدین طریق معادله‌ای برای تعیین α بدست می‌آید .

معادلهٔ خط مماس برمنحنی در M چنین است :

$$Y-f(\alpha)=f'(\alpha)(X-\alpha)$$

این معادله را با فرض در دست داشتن α نوشته‌ایم ، X و Y مختصات یك نقطهٔ غیر مشخص از خط مماسند . برای آنکه این خط از P بگذرد لازم و کافی است که مختصات P در معادلهٔ آن صدق کنند ،

یعنی داشته باشیم :

$$b-f(\alpha)=f'(\alpha)(a-\alpha) \qquad (۱)$$

این معادله که در آن a و b معلومند ، x های نقطه‌های تماس مماسهای مرسوم از P بر منحنی را بدست می‌دهد .

مثال : می‌خواهیم مماسهای مرسوم از نقطهٔ $P(۴$ و $۰)$ بر سهمی $y=x^۲-۳x$ را پیدا کنیم .

چون $y'=f'(\alpha)=۲\alpha-۳$ ، معادلهٔ مماس بر سهمی در نقطهٔ به طول α چنین است :

$$Y-(\alpha^۲-۳\alpha)=(۲\alpha-۳)(X-\alpha) \qquad (۲)$$

اگر بنویسیم که این خط از نقطهٔ (۰ و ۴) می‌گذرد ، برای تعیین طول نقطهٔ تماس خواهیم داشت :

$$۰-(\alpha^۲-۳\alpha)=(۲\alpha-۳)(۴-\alpha)$$

چون این معادله از درجهٔ دوم است ، معلوم می‌شود که از نقطهٔ مفروض دو مماس می‌توان بر سهمی مفروض رسم کرد . طولهای نقاط تماس این دو مماس ، ریشه‌های این معادله یعنی ۲ و ۶ و بنا بر این عرضهای این نقاط ۲ - و ۱۸ می‌باشند. برای نوشتن معادلهٔ این دو مماس، کافی است که در معادلهٔ(۲) ، α را برابر ۲ یا برابر ۶ بگیریم. بخصوص می‌بینیم که ضریب زاویه‌ای این دو مماس بترتیب ۱ و ۹ است .

طریقهٔ دوم - تعیین امتداد مماس - می‌توان قبلاً ضریب زاویه‌ای خط مماس را بدست آورد و بعد مختصات نقاط تماس را (اگر لازم باشد) حساب کرد . برای این منظور ، خطی با ضریب زاویه‌ای مجهول m از نقطهٔ $P(a \cdot b)$ می‌گذرانیم و معادله‌ای تشکیل می‌دهیم

که ریشه‌هایش طولهای نقاط تلاقی این خط و منحنی مفروض باشد. این معادله که از حذف y بین معادلات دستگاه:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y-b=m(x-a) \end{cases}$$

بدست می‌آید، عبارت است از:

$$(۳) \quad f(x)-b=m(x-a)$$

حال کافی است که m را طوری تعیین کنیم که این معادله برحسب x، ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

در حالی که این معادله از درجهٔ دوم یا سوم باشد، این شرط را بآسانی می‌توان نوشت.

مثال: در مورد مثال قبل، معادلهٔ (۳) چنین است:

$$x^2-3x=m(x-4)$$

$$(۴) \quad x^2-(m+3)x+4m=0$$

برای اینکه معادلهٔ (۴) ریشهٔ مضاعف داشته باشد، لازم و کافی است که m در معادلهٔ $\Delta=0$، یعنی درمعادلهٔ $(m+3)^2-16m=0$ یا $m^2-10m+9=0$ صدق کند، یعنی m برابر ۱ یا ۹ باشد. در آن حال از روی معادلهٔ (۴) می‌بینیم که x (طول نقطهٔ تماس) بترتیب برابر ۲ و ۶ خواهد شد.

۳۶- د- معادلهٔ قائم برمنحنی از نقطه‌ای واقع برمنحنی - اگر M نقطه‌ای ازمنحنی (C) وخط MT مماس بر (C) در M باشد، هرخطی که از M بگذرد و بر MT عمود باشد **قائم برمنحنی** (C) **در نقطهٔ** M **و** (M **پای قائم**) نامیده می‌شود. اگرمنحنی (C) مسطح باشد و در صفحهٔ xOy جاداشته باشد یکی از این قائمها در صفحهٔ خود منحنی یعنی درصفحهٔ xOy

قرار دارد. برای بدست آوردن معادلهٔ این قائم که از نقطهٔ M منحنی می‌گذرد، فرض می‌کنیم که معادلهٔ منحنی نسبت به دستگاه دو محور Ox و Oy به‌صورت $y=f(x)$ و $M(x_0$ و $y_0)$ باشد $[y_0=f(x_0)]$. می‌گوییم:

چون این خط از نقطهٔ $M(x_0$ و $y_0)$ می‌گذرد، معادله‌اش به صورت:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

می‌باشد و چون بر مماس در M عمود است، ضریب زاویه‌ای آن m، قرینهٔ عکس ضریب زاویه‌ای مماس یعنی برابر $-\frac{1}{y_0'}$ است (y_0' یعنی مشتق تابع به ازای $x=x_0$) بنابر این معادلهٔ قائم چنین می‌شود:

$$y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0)$$

یا:

$$\boxed{y_0'(y-y_0)+x-x_0=0}$$

مثال: می‌خواهیم معادلهٔ قائم بر منحنی نمایش $y=x^2-3x$ را در نقطهٔ M به طول ۳ یا $M(3$ و $0)$ بنویسیم. داریم:

$$y'=2x-3$$

$$y'_3=6-3=3$$

پس معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ M منحنی چنین می‌شود:

$$y=-\frac{1}{3}x+1 \quad \text{و یا} \quad 3(y-0)+x-3=0$$

معادلهٔ قائم بر منحنی از نقطه‌ای واقع درخارج منحنی- فرض می‌کنیم که بخواهیم معادلهٔ قائمی را بنویسیم که از نقطهٔ $P\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ بگذرد و بر منحنی

$y=f(x)$ عمود یاقائم باشد. برای این کارکافی است، نقطهٔ M پای قائم مرسوم ازنقطهٔ P بر منحنی را پیدا کنیم .

فرض می‌کنیم که نقطهٔ $M(\alpha،\beta)$ پای قائم باشد [α و β در رابطهٔ $\beta=f(\alpha)$ صدق می‌کنند] . معادلهٔ خط قائم برمنحنی‌در M عبارت است از :

$$Y-f(\alpha)=-\frac{1}{f'(\alpha)}(X-\alpha)$$

این معادله را با فرض در دست داشتن α نوشته‌ایم .

برای اینکه این‌خط ازنقطهٔ P بگذرد، لازم وکافی‌است که‌مختصات P در معادلهٔ آن صدق‌کنند ، یعنی داشته باشیم :

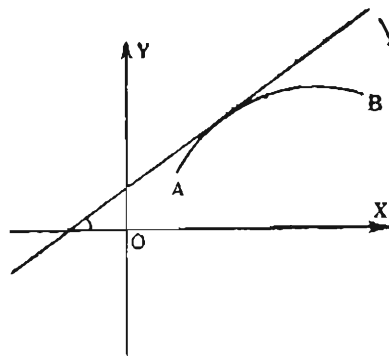
$$b-f(\alpha)=-\frac{1}{f'(\alpha)}(a-\alpha)$$

این معادله که در آن a و b معلومند طولهای پای قائم مرسوم از P بر منحنی را بدست می‌دهد .

تعیین تحدب و تقعر منحنی و نقطهٔ عطف

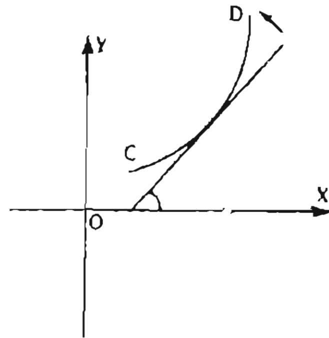
۳۷ ـ تحدب ـ تقعر ـ نقطهٔ عطف ـ اگر وضع محورهای مختصات را مطابق معمول بگیریم ، برای سهولت بیان امتداد محور y ها را شاغولی می‌نامیم . با این قرارداد دو اصطلاح « رو به بالا» و «درجهت y های مثبت » به یك معنی بکار می‌روند . در این صورت بترتیب در هریك از شکلهای زیر چنین می‌گوییم :

در شکل الف ، تحدب‌قوس AB رو به بالا (یعنی در جهت y های مثبت) است یا می‌توانیم بگوییم تقعرش رو به‌پایین (یعنی در جهت yهای منفی) است .



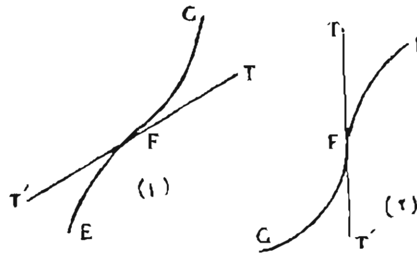
(ش الف)

در شکل ب ، قوس CD به طرف پایین محدب است یاتقعرش به سوی yهای مثبت می‌باشد .



(ش ب)

درشکل ج ، قوس EFG شامل‌دوقسمت‌است : $\widehat{EF}$ که مانند $\widehat{AB}$ از شکل‌الف ، تحدبش رو به بالا و $\widehat{FG}$ که مانند $\widehat{CD}$ از شکل‌ب ، تحدبش رو به پایین است . نقطهٔ F از قوس EFG حد فاصل بین دو قوس FE و FG است که تقعر یکی به سوی پایین و تقعردیگری به‌طرف بالاست . به‌عبارت‌دیگر F نقطه‌ای است از منحنی که در آنجا سوی[1] تقعر این منحنی تغییر می‌کند . F را نقطهٔ **عطف** این منحنی می‌نامند .



(ش ج)

هر قوس که مانند $\widehat{AB}$ یا $\widehat{EF}$ تحدبش به طرف بالا باشد جمیع نقاطش زیر هر یك از مماسهای نقاط بین دوسر آن منحنی قرار دارد (بجز نقطهٔ تماس که روی مماس است) . در مورد چنین قوس اگر طولهای دوسر آن را a و b $(a<b)$ ومعادلهٔ قوس‌را $y=f(x)$ بگیریم، وقتی که x از a به b ترقی می‌کند ، مماس بر منحنی در جهت سهم (شکل الف) دوران می‌کند یعنی زاویهٔ مماس با Ox تنزل می‌کند و بالنتیجه تانژانت این زاویه یا ضریب زاویه‌ای مماس ، نیز تنزل می‌کند یعنی $f'(x)$ تابعی است نزولی از x .

هر قوس که مانند $\widehat{CD}$ یا $\widehat{FG}$ به طرف بالا مقعر باشد جمیع نقاطش (بجز نقطهٔ تماس) بالای هر یك از خطوط مماس آن واقع‌است و هنگامی‌که x در فاصلهٔ $(a \cdot b)$ ترقی می‌کند ، مماس بر منحنی در جهت سهم (شکل ب) دوران می‌کند یعنی زاویهٔ مماس با Ox وبالنتیجه $f'(x)$ تابعی است صعودی از x .

در روی قوسهای مانند EFG که دارای نقطهٔ عطف مثل F می‌باشند ، اگر مماس برمنحنی را در نقطهٔ عطف رسم‌کنیم ، این مماس از منحنی می‌گذرد ، زیرا یك قسمت از منحنی باید در یك طرف مماس و قسمت دیگر در طرف دیگر مماس قرار گیرد ، به همین دلیل می‌گویند که نقطهٔ عطف ، نقطه‌ای است از منحنی‌که مماس برمنحنی‌در آن نقطه ، ازمنحنی عبور می‌کند . بنابر این در نقطهٔ عطف چون تابع $f'(x)$ از صعودی بودن به نزولی بودن یا بعکس تغییر می‌کند مشتق آن یعنی $f''(x)$ تغییر علامت می‌دهد . بنابراین می‌توان گفت که در نقطهٔ عطف تابع $y'=f'(x)$ (ضریب‌زاویه‌ای‌مماس) ماکزیمم یا مینیمم

است . بطور خلاصه هرگاه تقعرمنحنی $y=f(x)$ **در فاصلهٔ** $(a \cdot b)$ به سمت پایین باشد در آن فاصله تابع $f'(x)$ **نزولی‌است ، واگر تقعرمنحنی به سمت بالا باشد تابع**$f'(x)$ **در آن فاصله صعودی است ، و در نقطهٔ عطف** تابع $f''(x)$ **تغییر علامت می‌دهد .**

بعکس اگر **در ازای جمیع مقادیر x متعلق به فاصلهٔ** $(a \cdot b)$ مشتق $f'(x)$ یعنی مشتق ثانی $y=f(x)$ ، $[y''=f''(x)]$ ، **مثبت باشد در این فاصله تابع** $f'(x)$ **صعودی وتقعر منحنی** $y=f(x)$ **به سوی بالاست ،** و اگر **در فاصلهٔ** $(a \cdot b)$ ، y'' **منفی باشد تابع** $f'(x)$ **نزولی و تقعرمنحنی** $y=f(x)$ **به سوی پایین است ،** و اگر y'' در ازای $x=c$ تغییرعلامت دهد نقطهٔ به طول c از منحنی $y=f(x)$ نقطهٔ عطف می‌باشد .

مطالب فوق در دو جدول زیر خلاصه شده‌اند :

x	a	c	b
y''	−		+
y'	↘ مینیمم ↗		
تقعر منحنی	به‌سوی پایین	نقطهٔ عطف	به‌سوی بالا

x	a	c	b
y''	+		−
y'	↗ ماکزیمم ↘		
تقعر منحنی	به‌سوی بالا	نقطهٔ عطف	به‌سوی پایین

۳۸- تعیین تقعر وتحدب و نقاط عطف یك منحنی - از آنچه در بالا بیان شد قاعدهٔ عملی برای تعیین سوی تقعر(یا تحدب) ونقاط‌عطف یك منحنی به معادلهٔ $y=f(x)$ چنین بدست می‌آید :

مشتق ثانی تابع y یعنی y'' را حساب می‌کنیم و مقادیری را که

در ازای آنها "y **تغییرعلامت می‌دهد** بدست می‌آوریم ، این مقادیر معمولاً ریشه‌های $f''(x)=0$ می‌باشند (در برخی موارد ، مثلاً آنجاکه "y کسری است ، ممکن است‌که به‌ازای مقادیری از x ، "y از $\pm\infty$ به $\mp\infty$ تغییرعلامت دهد ، در آن صورت این مقادیررا هم به ریشه‌ها منضم می‌کنیم) . پس‌از آن ، این مقادیر را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم ، در نتیجه فواصلی برای تغییرات x بدست می‌آیدکه درهر یك از آنها علامت "y یعنی صعودی یا نزولی بودن 'y معین می‌شود . آنجا که 'y صعودی ($y''>0$) است تقعر به سوی بالاست و آنجاکه 'y نزولی ($y''<0$) است تقعر به سوی پایین است . ضمناً مقادیری که در ازای آنها "y تغییرعلامت می‌دهد طولهای نقاط عطف می‌باشند .

مثال۱ – برای تعیین نقطهٔ عطف‌وسوی‌تقعرمنحنی $y=x^3-3x^2$ مشتق دوم آن را حساب می‌کنیم و ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم :

$$y'=3x^2-6x$$
$$y''=6x-6=6(x-1)$$

که ریشهٔ آن $x=1$. بنا بر این جدول زیر را داریم :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		−	0	+	
y'		↘		↗	
تقعر		به سوی پایین	نقطهٔ عطف	به سوی بالا	

چنانکه می‌بینیم تقعر منحنی در ازای $x<1$ به سوی پایین ودر ازای $x>1$ به سوی بالا و نقطهٔ به طول $x=1$ نقطهٔ عطف آن است .

مثال ۲ : برای تعیین سوی تقعر منحنی $y=x^4-10x^3+36x^2$ چنین عمل می‌کنیم :

$$y'=4x^3-30x^2+72x$$
$$y''=12x^2-60x+72=12(x^2-5x+6)$$

و ریشه‌های "y را بدست می‌آوریم : $x_1=2$ ، $x_2=3$ و جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y''		+	0	−	0	+	
y'		↗		↘		↗	
تقعر		به سوی بالا	نقطهٔ عطف	به‌سوی‌پایین	نقطهٔ عطف	به سوی بالا	

چنانکه می‌بینیم تقعر منحنی در دو فاصلهٔ $(-\infty, 2)$ و $(3, +\infty)$ به طرف بالا ودرفاصلهٔ $(2, 3)$ به طرف پایین‌است. منحنی دارای دو نقطهٔ عطف به طولهای ۲ و ۳ می‌باشد .

مثال ۳ : برای تعیین جهت تقعر و نقطهٔ عطف منحنی نمایش $y=(x-2)^{\frac{5}{3}}$ بترتیب داریم :

$$y'=\frac{5}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}}$$

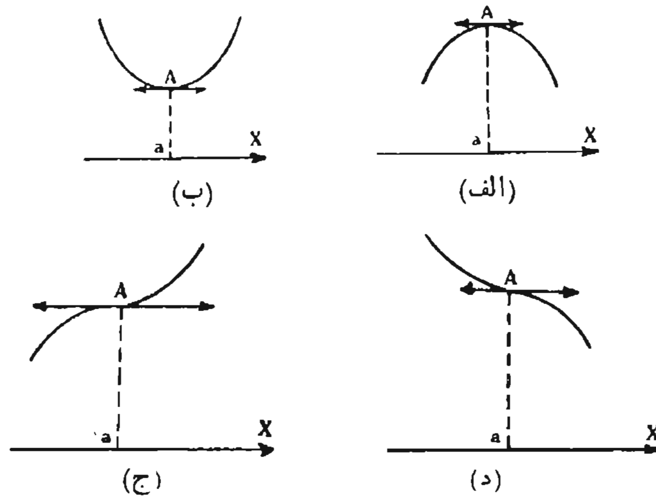
$$y''=\frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9\sqrt[3]{x-2}}$$

می‌بینیم y'' در ازای $x=2$ منفصل می‌شود و از $-$ به $+$ تغییر علامت می‌دهد :

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y''		$-$	∞	$+$	
y'		↘	مینیمم	↗	
تقعر		به سوی پایین	نقطهٔ عطف	به سوی بالا	

۳۹ـ تشخیص ماکزیمم ازمینیمم با استفاده ازمشتق دوم ـ

فرض می‌کنیم‌که مشتق تابع $y=f(x)$ به ازای $x=a$ صفر شود ، ممکن است که تابع به ازای $x=a$ ماکزیمم یا مینیمم باشد یا جهت تغییراتش ثابت بماند . اگر بخواهیم بدون تعیین علامت مشتق ، چگونگی تابع را به ازای $x=a$ مشخص کنیم ، کافی است که معین کنیم که تقعر منحنی (C) نمایش تغییرات تابع ، در مجاورت نقطهٔ A (به طول a) به طرف بالا یا به طرف پایین است یا اینکه A نقطهٔ عطف است (جهت تقعر تغییر می‌کند) . زیرا وقتی که تابع در ازای $x=a$ مینیمم باشد تقعر منحنی (C) در مجاورت A به‌طرف بالا خواهد بود (شکل ب) و داریم $f''(a)>0$ و وقتی که تابع در ازای a ماکزیمم باشد تقعر منحنی (C) در مجاورت A به طرف پایین خواهد بود (شکل الف) و داریم $f''(a)<0$. اما اگر مشتق در ازای $x=a$ **تغییر علامت ندهد** تابع ماکزیمم یامینیمم **نخواهد** بود و A نقطهٔ عطف (C) **است** . [**شکلهای** (ج) و (د)] .



$f'(a)=0$:
- $f''(a)>0$ **تابع $f(x)$ در ازای a مینیمم است .**
- $f''(a)<0$ « « « **ماکزیمم است .**
- $f''(a)=0$ **به‌ازای $x=a$ جهت تابع تغییر نمی‌کند .**

همین نتایج‌را می‌توان‌ازروی جهت‌تغییرات $f'(x)$ نیز بدست‌آورد . مثلاً اگر $f''(a)>0$ باشد تابع $f'(x)$ در ازای $x=a$ صعودی است وچون $f'(a)=0$ ، $f'(x)$ در ازای x های‌کمی‌کوچکتراز a منفی و در ازای x های کمی بزرگتر ، مثبت است . بنابراین $f(x)$ در ازای $x=a$ مینیمم خواهد بود :

x		a	
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-\ -$	↗ ۰	$+\ +$
$f(x)$	نزولی	مینیمم	صعودی

تمرین

تعیین کنید که کدامیك از توابع زیر اتصالی و کدامیك انفصالیند و به ازای چه مقادیر متغیر ، منفصل می‌شوند :

-۱ $y=x^{2}-4x$ -۲ $y=x^{3}-1$

-۳ $y=\frac{x^{2}-1}{x^{2}+1}$ -۴ $y=\sqrt{x^{2}+1}$

-۵ $y=\frac{x^{2}+1}{x^{2}-1}$ -۶ $y=\sqrt{x^{2}-1}$

-۷ $y=\frac{x}{x^{2}-2x+1}$ -۸ $y=\sqrt{-x^{2}+4x-3}$

مشتق توابع زیر را تعیین‌کنید :

-۹ $y=\frac{(x-1)^{2}}{3x}$ -۱۰ $y=\frac{(3x+1)^{3}}{x-2}$

-۱۱ $y=\sqrt{\frac{x^{2}-1}{x}}$ -۱۲ $y=\sqrt{x\cdot\frac{x-1}{x+1}}$

-۱۳ $y=\frac{\sqrt{x-1}}{2x+1}$ -۱۴ $y=\frac{x^{2}-1}{(2x+5)^{3}}$

-۱۵ $y=\sqrt{x\sqrt{x-1}}$ -۱۶ $y=\sqrt[4]{x^{2}-1}\cdot\sqrt[3]{4x-1}$

-۱۷ $y=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ -۱۸ $y=\sqrt[3]{x^{2}-1}$

-۱۹ $y=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x(x^{2}+1)}}$ -۲۰ $y=ax\sqrt[m]{\frac{1-x}{b+x}}$

-۲۱ $y=(ax+b)^{3}\cdot(x-1)$ -۲۲ $y=\frac{x^{2}}{4}\sqrt{x\cdot\frac{x-1}{x+1}}$

-۲۳ $y=4\sin x-1$ -۲۴ $y=\cos x+1$

-۲۵ $y=-5\,tg\,x+2x$ -۲۶ $y=3\,cotg\,x+2\sin x$

-۲۷ $y=3\sin x\cdot\cos x-1$ -۲۸ $y=6\,tg\,x\cdot\sin x+3\cos x$

-۲۹ $y=\frac{4\cos x}{\cos x+2}$ -۳۰ $y=3\,cotg\,x\cdot\sin x+2\cos x\cdot tg\,x$

مشتق بگیرید (مشتق تابع تابع) :

-۳۱ $y=5u^{3}$ که درآن $u=x^{2}-1$.

-۳۲ $y=t.v$ که درآن $t=3x+2$ و $V=\sqrt{x^{2}-4x}$.

-۳۳ $y=\frac{t^{2}-1}{t+3}\cdot\frac{v}{v^{2}-1}$ که‌درآن $t=x^{2}-1$ و $V=\frac{2x-1}{x+2}$.

-۳۴ $y=4\cos^{2}\frac{x-1}{2x+3}$ -۳۵ $y=2\sin^{3}5x^{2}$

-۳۶ $y=5\,tg^{3}\sqrt{x-1}$

-۳۷ $y=3\cos^{2}(2x^{3}-1)\cdot\sin\sqrt[3]{x^{2}+1}$

-۳۸ $y=4\,cotg^{2}\sqrt{x}+2\sin^{2}\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$

-۳۹ $y=4x^{2}\cdot tg^{3}\sqrt{x}\cdot cotg\sqrt[3]{x^{2}-1}$

مشتق توابع زیررا برحسب آنکه یك دفعه x تابعی از y و یك دفعه y تابعی از x باشد پیداکنید :

-۴۰ $x+4y-2xy-1=0$

-۴۱ $x^{2}-y^{2}+4xy-1=0$

-۴۲ $3x^{2}+4y^{2}-3xy+5=0$

-۴۳ $(y-2x)(4y+x-1)=9$

-۴۴ $(x^{2}-y^{2})(xy-1)4y+5=0$

مشتق طرفین هریك ازاتحادهای زیررا بدست‌آورید وتحقیق کنید که باهم برابرند :

۴۵- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

۴۶- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

۴۷- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

۴۸- $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$

۴۹- $\sin 2x = \frac{2\,tg x}{1+tg^2 x}$

۵۰- $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}$

مشتق اول و مشتق دوم هریك از توابع زیررا پیداکنید :

۵۱- $y = x^2 - 4x + 1$

۵۲- $y = x^4 - x^2 + 4$

۵۳- $y = \frac{x-1}{x+1}$

۵۴- $y = \frac{2}{x-1}$

۵۵- $y = \frac{x+1}{x-1}$

۵۶- $y = \frac{x^2}{x+1}$

۵۷- $y = \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}$

۵۸- $y = \frac{x^2 - 2}{(x+1)^2}$

۵۹- $y = \sin^2 x - 1$

۶۰- $y = \frac{2\sin x}{\sin x + 1}$

۶۱- $y = 2\,tg x - 1$

۶۲- $y = \frac{\cos x}{2\sin x + 1}$

۶۳- $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

۶۴- $y = 4\sin x \cos 2x$

جهت تغییرات و ماکزیمم یامینیمم هریك از توابع زیررا تعیین کنید :

۶۵- $y = 2x^2$

۶۶- $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$

۶۷- $y = \sqrt{x-1}$

۶۸- $y = \frac{2x-1}{x+2}$

۶۹- $y = \frac{x^2-1}{x^2+4x}$

۷۰- $y = \sqrt{x^2 - 1}$

۷۱- $y = x\sqrt{\frac{x-1}{1+x}}$

۷۲- $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

مسائل مربوط به مماس و قائم :

۷۳ـ معادلهٔ مماس بر منحنی نمایش $y = x^3 - x^2$ را در نقطه‌ای به طول ۱ بنویسید .

۷۴ـ معادلهٔ مماس بر منحنی نمایش $y^2 + x^2 - 4x = 0$ را در نقطه‌ای به طول ۱ بنویسید (دوجواب) .

۷۵ـ معادلهٔ مماس برمنحنی‌نمایش $2x^2 - y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ بنویسید (دوجواب) .

۷۶ـ از نقطه‌ای واقع بر محور yها به عرض ۲− خطی بر منحنی نمایش $y = x^2 - 2x$ مماس کنید ومعادلات مماسها را بنویسید .

۷۷ـ از نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$ خطی برمنحنی‌نمایش $x^2 + y^2 + 2x + 2y = -1$ مماس‌کنید ومعادلات مماسها رابنویسید .

۷۸ـ از نقطهٔ $D\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$ چند خط می‌توان برمنحنی نمایش : $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$ مماس‌کرد ؟ معادلات مماسها رابنویسید.

۷۹ـ معادلهٔ قائم برمنحنی $y = x^2 - 4x + 1$ را درنقطه‌ای‌به‌طول ۱ بنویسید .

۸۰ـ معادلهٔ قائم بر منحنی $x^2 + y^2 = 4$ را در نقطه‌ای به طول ۱ بنویسید .

۸۱ـ معادلهٔ قائم برمنحنی $y = \frac{3\sin x}{\sin x + 2}$ را در نقطه‌ای به طول $x = \frac{\pi}{6}$ بنویسید .

۸۲ـ معادلهٔ قائم برمنحنی $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ را در نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ بنویسید .

۸۳ـ معادلهٔ‌قائم برمنحنی $y = \frac{x-1}{x+1}$ را ازنقطهٔ $M\left|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right.$ بنویسید.

مسائل مربوط به تقعر و تحدب و نقطهٔ عطف :

تعیین کنید در چه فاصله‌ای از متغیر ، منحنی نمایش هر یك از توابع زیر محدب یا مقعرند و همچنین مختصات نقاط عطف آنها را پیدا کنید :

۸۴- $y=2x^2-4x+1$

۸۵- $y=-x^2+6x+1$

۸۶- $y=x^3$

۸۷- $y=(x-1)^4+4x$

۸۸- $y=x^3-3x^2+4$ (تحقیق کنید که نقطهٔ عطف مرکز تقارن منحنی است) .

۸۹- $y=-2x^3+3x^2-4x$ (تحقیق کنید که نقطهٔ عطف مرکز تقارن منحنی آن است) .

۹۰- $y=(x-1)^3$

۹۱- $y=x^4-1$

۹۲- $y=x^4-4x^2+1$

۹۳- $y=x^4-2x^2+1$

۹۴- $y=x^4+x^2+1$

۹۵- $y=(x+1)^4$

۹۶- $y=\frac{2x-1}{x+2}$

۹۷- $y=\frac{x+1}{1-x}$

۹۸- $y=\frac{x^2-2x+1}{x+3}$

۹۹- $y=\frac{x^2-1}{(x+2)^2}$

طولهای نقاط ماکزیمم و مینیمم هریك از توابع زیررا تعیین نموده، بدون استفاده از جدول ، تحقیق کنید که کدام طول نقطهٔ ماکزیمم وکدام طول نقطهٔ مینیمم است :

۱۰۰- $y=x^2-2x+1$

۱۰۱- $y=-x^2+4x+1$

۱۰۲- $y=x^3+x^2$

۱۰۳- $y=-x^3+3x^2$

۱۰۴- $y=\frac{x-1}{x^2+1}$

۱۰۵- $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

۱۰۶- $y=\frac{x^2-2x+1}{x+3}$

۱۰۷- $y=\frac{x^2-4x}{(x+1)^2}$

فصل سوم

صور مبهم و رفع ابهام آنها

۴۰- صورتهای مبهم - می‌دانید که برای محاسبهٔ مقدار یك تابع در ازای یکی از اندازه‌های متغیر باید آن اندازهٔ متغیر را در عبارت تابع قرار داد ومقدار آن را حساب‌کرد . گاهی در ازای بعضی اندازه‌های متغیر (محدود یا نامحدود) اندازهٔ آن عبارت به یکی از شکلهای $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\infty\times 0$ یا $\infty-\infty$ در می‌آید که مقدار حقیقی هیچکدام به همین شکل معلوم نیست . مثل :

$y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ که به ازای $x=2$ به شکل $\frac{0}{0}$ است .

و $y=\frac{x+3}{2x-1}$ که به ازای $x=\infty$ به شکل $\frac{\infty}{\infty}$ است .

و $y=x\,cotg\,x$ که به ازای $x=0$ به شکل $\infty\times 0$ است .

و $y=x^2-3x$ که به ازای $x=\infty$ به شکل $\infty-\infty$ است .

شکلهای $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\infty\times 0$ یا $\infty-\infty$ راصورمبهم‌می‌گویند و برای پیداکردن **اندازهٔ حقیقی** آنها باید از آنها **رفع ابهام** کرد .

اگر y درازای $x=x_0$ به صورت مبهم‌درآید ، مقصوداز **اندازهٔ‌حقیقی y در ازای $x=x_0$ حد اندازه‌های y است وقتی‌که x به سمت x_0 میل کند و برابر آن شود .**

۴۱- رفع ابهام صور مبهم - درجبر سال‌پنجم دیدیدکه اولاً :

قضیه - اندازهٔ یك چند جمله‌ای در ازای $x=\pm\infty$ همان مقدا

مسائل مربوط به تقعر و تحدب و نقطهٔ عطف :

تعیین کنید در چه فاصله‌ای از متغیر ، منحنی نمایش هر یك از توابع زیر محدب یا مقعرند و همچنین مختصات نقاط عطف آنها را پیداکنید :

۸۴- $y=2x^2-4x+1$ ۸۵- $y=-x^2+6x+1$

۸۶- $y=x^3$ ۸۷- $y=(x-1)^4+4x$

۸۸- $y=x^3-3x^2+4$ (تحقیق کنید که نقطهٔ عطف مرکز تقارن منحنی است) .

۸۹- $y=-2x^3+3x^2-4x$ (تحقیق کنید که نقطهٔ عطف مرکز تقارن منحنی آن است) .

۹۰- $y=(x-1)^3$ ۹۱- $y=x^4-1$

۹۲- $y=x^4-4x^2+1$ ۹۳- $y=x^4-2x^2+1$

۹۴- $y=x^4+x^2+1$ ۹۵- $y=(x+1)^4$

۹۶- $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ ۹۷- $y=\dfrac{x+1}{1-x}$

۹۸- $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+3}$ ۹۹- $y=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$

طولهای نقاط ماکزیمم و مینیمم هریك از توابع زیر را تعیین نموده ، بدون استفاده از جدول ، تحقیق کنید که کدام طول نقطهٔ ماکزیمم و کدام طول نقطهٔ مینیمم است :

۱۰۰- $y=x^2-2x+1$ ۱۰۱- $y=-x^2+4x+1$

۱۰۲- $y=x^3+x^2$ ۱۰۳- $y=-x^3+3x^2$

۱۰۴- $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ ۱۰۵- $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

۱۰۶- $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+3}$ ۱۰۷- $y=\dfrac{x^2-4x}{(x+1)^2}$

فصل سوم

صور مبهم و رفع ابهام آنها

۴۰- صورتهای مبهم - می‌دانید که برای محاسبهٔ مقدار یك تابع در ازای یکی از اندازه‌های متغیر باید آن اندازهٔ متغیر را در عبارت تابع قرار داد ومقدار آن را حساب‌کرد . گاهی در ازای بعضی اندازه‌های متغیر (محدود یا نامحدود) اندازهٔ آن عبارت به یکی از شکلهای $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\infty\times 0$ یا $\infty-\infty$ در می‌آید که مقدار حقیقی هیچکدام به همین شکل معلوم نیست . مثل :

$y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ که به ازای $x=2$ به شکل $\frac{0}{0}$ است .

و $y=\dfrac{x+3}{2x-1}$ که به ازای $x=\infty$ به شکل $\frac{\infty}{\infty}$ است .

و $y=x\,cotg\,x$ که به ازای $x=0$ به شکل $\infty\times 0$ است .

و $y=x^2-3x$ که به ازای $x=\infty$ به شکل $\infty-\infty$ است .

شکلهای $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\infty\times 0$ یا $\infty-\infty$ راصورمبهم‌می‌گویند و برای پیداکردن **اندازهٔ حقیقی** آنها باید از آنها **رفع ابهام** کرد .

اگر y درازای $x=x_0$ به صورت مبهم‌درآید ، مقصوداز **اندازهٔ حقیقی y در ازای $x=x_0$ حد اندازه‌های y است وقتی‌که x به سمت x_0 میل کند و برابر آن شود .**

۴۱- رفع ابهام صور مبهم - درجبر سال‌پنجم دیدیدکه اولاً :

قضیه - اندازهٔ یك چند جمله‌ای در ازای $x=\pm\infty$ همان مقدار

جملهٔ بزرگترین درجهٔ آن در ازای $x=\pm\infty$ است .

از این قضیه ، درحقیقت می‌توان برای رفع ابهام چند جمله‌ایهایی که به ازای $x=\pm\infty$ به شکل $\infty-\infty$ یا $+\infty-\infty$ در می‌آیند استفاده کرد . مثلاً اندازهٔ $y=x^3-x$ به ازای $x=-\infty$ به صورت مبهم $-\infty+\infty$ است ولی می‌دانیم که مقدار آن درحقیقت $-\infty$ می‌باشد .

ثانیاً : با فرض اینکه $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله‌ای باشند **اندازهٔ تابع** $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در ازای $x=\pm\infty$:

الف ـ صفراست ، اگر درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج کوچکتر باشد .

ب ـ عددی است برابر خارج قسمت ضریب جملهٔ بزرگترین درجهٔ صورت ، برضریب جملهٔ بزرگترین درجهٔ مخرج ، وقتی که درجهٔ صورت مساوی درجهٔ مخرج باشد .

ج ـ بینهایت‌است ، وقتی‌که درجهٔ صورت‌بزرگتر از درجهٔ مخرج‌باشد.

از این قواعد نیز می‌توان برای رفع ابهام توابع کسری که به ازای $x=\pm\infty$ به شکل $\frac{\infty}{\infty}$ در می‌آیند استفاده کرد . مثلاً اندازهٔ حقیقی‌تابع $y=\frac{2x-1}{3x+1}$ که به ازای $x=+\infty$ به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آید مساوی $\frac{2}{3}$ است .

علاوه بر قواعد فوق دستورهای دیگری برای رفع ابهام صور مبهم وجود دارد که ذیلاً باختصار به بعضی از آنها اشاره می‌کنیم :

۴۲ـ رفع ابهام‌صورت‌مبهم $\frac{0}{0}$: قاعدهٔ Hopital ـ چنانچه **تابعی به صورت** $\frac{f(x)}{g(x)}$ **باشد ودر ازای مقداری‌از x مانند x_0 هم صورت**

و هم مخرج صفر شوند ، یعنی $f(x_0)=0$ و $g(x_0)=0$ باشد ، تابع به ازای $x=x_0$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید . می‌توانیم بنویسیم :

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

[چون $f(x_0)=0$ و $g(x_0)=0$ ، در حقیقت ازصورت ومخرج کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ چیزی کم نشده است] ویا به فرض اینکه $x\neq x_0$ باشد :

$$y=\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$

حال چنانچه $f(x)$ و $g(x)$ نسبت به x دارای مشتق باشند ، وقتی‌که x را به سمت x_0 میل می‌دهیم ؛ طبق تعریف می‌دانیم‌که : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. می‌بینیم‌که y به سمت‌حدی‌برابر $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ میل می‌کند . پس داریم :

$$\lim_{x=x_0} y=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

یعنی اگر کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ **به ازای** $x=x_0$ **به صورت مبهم** $\frac{0}{0}$ در آید ، **حد آن در ازای** $x=x_0$ **برابر حد** $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **به ازای همان** $x=x_0$ است **(مشروط براینکه این حد اخیر وجود داشته باشد) .**

(قاعدهٔ هوپیتال)

(پیداست که بنا بر همین دستور اگر $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ در ازای $x=x_0$ باز به شکل $\frac{0}{0}$ باشد مقدار حقیقی آن برابر مقدار $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ به ازای $x=x_0$ است).

مثال ۱ : می‌خواهیم مقدار $y=\frac{\sin 3x}{\sin x}$ را به ازای $x=\pi$ بدست آوریم. می‌بینیم این تابع به ازای $x=\pi$ به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید. برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم :

$$y=\left(\frac{3\cos 3x}{\cos x}\right)_{x=\pi}=\frac{3\cos 3\pi}{\cos\pi}=\frac{-3}{-1}=3$$

بنابراین مقدار حقیقی $y=\frac{\sin 3x}{\sin x}$ به ازای $x=\pi$ برابر ۳ است.

مثال ۲ : برای یافتن مقدار حقیقی تابع $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ در ازای $x=2$ که به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم :

$$y_2=\left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)_2=\frac{4-3}{4-5}=-1$$

توجه کنید ! از تابع فوق در ازای $x=2$ به طریق دیگری می‌توان رفع ابهام کرد : چون صورت و مخرج آن به ازای $x=2$ صفر می‌شوند یعنی هردو بر $x-2$ قابل‌قسمتند پس هردو را به‌حاصل ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم و عوامل $x-2$ را از صورت ومخرج حذف می‌کنیم (کسر را ساده می‌کنیم) تاکسر جدیدی بدست آید ، چون این کسر جدید به ازای همهٔ مقادیر x با کسر مفروض معادل است بخصوص

به ازای $x=2$ مقدار آن را بطور قرار داد اندازهٔ حقیقی کسرمفروض می‌گویند .

$$y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x-1}{x-3}$$

که به ازای $x=2$ مقدار y می‌شود -1 .

مثال ۳ـ برای یافتن مقدارحقیقی تابع $y=\frac{x-2}{5-\sqrt{x^2+21}}$ در ازای $x=2$ که به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید ، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم :

$$y_2=\left(\frac{1}{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+21}}}\right)_2=\frac{1}{-\frac{4}{10}}=-\frac{5}{2}$$

توجه کنید ! از تابع فوق هم در ازای $x=2$ به طریق‌دیگری می‌توان رفع ابهام نمود : صورت ومخرج آن را در مزدوج مخرج ضرب کرده وبعدکسر حاصل را ساده می‌کنیم :

$$y=\frac{(x-2)(5+\sqrt{x^2+21})}{(5-\sqrt{x^2+21})(5+\sqrt{x^2+21})}=\frac{(x-2)(5+\sqrt{x^2+21})}{25-x^2-21}$$

$$=\frac{(x-2)(5+\sqrt{x^2+21})}{(2-x)(2+x)}=\frac{-(5+\sqrt{x^2+21})}{2+x}$$

مقدار کسر اخیر به ازای $x=2$ می‌شود :

$$y_2=\frac{-(5+5)}{4}=-\frac{5}{2}$$

۴۳ـ رفع ابهام صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ ـ صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ رامی‌توان

به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در آورد و از آن رفع ابهام کرد . زیرا مثلاً اگر تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ به ازای یکی ازمقادیر x به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ در آید آن را می‌توان به صورت $\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ نوشت تا به ازای همان مقدار از x به صورت $\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}$ یعنی $\frac{0}{0}$ در آید .

مثال : می‌خواهیم اندازهٔ حقیقی $y=\frac{tg\,x}{tg\,3x}$ را در ازای $x=\frac{\pi}{2}$ حساب کنیم، چون y در ازای $x=\frac{\pi}{2}$ به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آید آن را چنین می‌نویسیم $y=\frac{\frac{1}{tg\,3x}}{\frac{1}{tg\,x}}$ که در ازای $x=\frac{\pi}{2}$ به صورت $\frac{0}{0}$ درآید . اکنون برای رفع ابهام ، طبق قاعدهٔ هوپیتال می‌نویسیم :

$$y_{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\frac{-3(1+tg^2 3x)}{tg^2 3x}}{\frac{-(1+tg^2 x)}{tg^2 x}}\right)_{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\frac{3}{tg^2 3x}+3}{\frac{1}{tg^2 x}+1}\right)_{\frac{\pi}{2}}$$

چون $\frac{3}{tg^2 3x}$ و $\frac{1}{tg^2 x}$ در ازای $x=\frac{\pi}{2}$ صفرند پس :

$$y_{\frac{\pi}{2}}=\frac{+3}{+1}=3$$

یعنی اندازهٔ حقیقی $y=\frac{tg\,x}{tg\,3x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ برابر است با ۳.

توجه کنید ! قاعدهٔ هوپیتال برای رفع ابهام صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ نیز عیناً قابل اجراست (بدون اثبات می‌پذیریم) به این معنی‌که اگر **$\frac{f(x)}{g(x)}$ در ازای $x=x_0$ به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ باشد اما $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ در ازای x_0 معین باشد اندازهٔ حقیقی $\frac{f(x)}{g(x)}$ در ازای x_0 برابر $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ است .**

اگر این قاعده را درمورد مثال فوق بکار ببریم داریم :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{tg\,x}{tg\,3x}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1+tg^2 x}{3(1+tg^2 3x)}=\frac{cos^2 3x}{3cos^2 x}$$

و متوالیاً

$$\left(\frac{tg\,x}{tg\,3x}\right)_{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{cos^2 3x}{3cos^2 x}\right)_{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{-6\,sin\,3x\,cos\,3x}{-6\,cos\,x\,sin\,x}\right)_{\frac{\pi}{2}}=$$

$$\left(\frac{sin\,6x}{sin\,2x}\right)_{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{6\,cos\,6x}{2\,cos\,2x}\right)_{\frac{\pi}{2}}=+3$$

۴۴ ـ رفع ابهام صورت $\infty \times 0$ **ـ** این صورت مبهم را نیز می‌توان به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ (یا $\frac{\infty}{\infty}$) درآورد و از آن رفع ابهام کرد. زیرا مثلاً اگر $f(x)$ و $g(x)$ به ازای یکی از مقادیر x بترتیب برابر صفر و ∞ شوند تابع، $f(x).g(x)$ به ازای همان مقدار x، به صورت $\infty \times 0$ درمی‌آید ومی‌توان آن را به صورت $\frac{f}{\frac{1}{g}}$ (یا $\frac{g}{\frac{1}{f}}$) نوشت تا به ازای همان مقدار از x به صورت $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ یعنی $\frac{0}{0}$ در آید.

مثال ۱ـ اگر بخواهیم مقدار $y = x\,cotg\,x$ را به ازای $x = 0$ که به صورت مبهم $y = 0 \times \infty$ در می‌آید حساب کنیم می‌نویسیم: $y = \frac{x}{\frac{1}{cotg\,x}}$ تا در ازای $x = 0$ به صورت $\frac{0}{0}$ درآید و برای رفع ابهام برطبق قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$y_0 = \left[\frac{1}{\frac{+(1+cotg^2 x)}{cotg^2 x}}\right]_0 = \left[\frac{1}{\frac{+1}{cotg^2 x}+1}\right]_0$$

و چون $\frac{1}{cotg^2 x}$ در ازای $x = 0$ برابر صفر است پس:

$$y_0 = \frac{1}{+1} = +1$$

یعنی مقدارحقیقی $y = x\,cotg\,x$ به‌ازای $x = 0$ برابر $+1$ است.

مثال ۲ـ تابع $y = (x^2 - 1) \times \frac{x-3}{x^2+3x-4}$ راکه به ازای $x = 1$ به‌صورت $\infty \times 0$ درمی‌آید می‌توان به‌صورت $y = \frac{\frac{x^2-1}{x^2+3x-4}}{x-3}$ نوشت تا به ازای $x = 1$ به صورت $\frac{0}{0}$ در آید و آن را برطبق قاعدهٔ هوپیتال رفع ابهام کرد و مقدار حقیقی آن را به ازای $x = 1$ بدست آورد، که می‌شود:

$$y = -\frac{4}{5}$$

اما از این تابع به طریق سهل‌تر دیگری می‌توان رفع ابهام‌کرد. به ترتیب زیر:

$$y = (x^2 - 1) \times \frac{x-3}{x^2+3x-4} = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+4)} = \frac{(x+1)(x-3)}{x+4}$$

که به ازای $x = 1$ مقدار حقیقی y می‌شود:

$$y = \frac{2(-2)}{5} = -\frac{4}{5}$$

۴۵ـ رفع ابهام صورت $\infty - \infty$ **ـ** ممکن است که تابع $f(x) - g(x)$ به ازای یکی از مقدارهای x به صورت مبهم $\infty - \infty$ درآید. رفع ابهام ازاین صورت را چنانچه $f(x)$ و $g(x)$ هردو چند‌جمله‌ای باشند دیدید، اما اگر یکی ازآنها یا هردوآنها چند جمله‌ای نباشند، می‌توان عبارت را به یکی از صورتهای مبهم‌که قبلاً ذکر شد

تبدیل کرد و از آن رفع ابهام کرد. چند مثال زیر مطلب را روشن می‌کند:

مثال ۱ـ برای یافتن اندازهٔ حقیقی $y=3x-\sqrt{9x^2-x}$ در ازای $x=+\infty$ که به صورت $\infty-\infty$ در می‌آید، عبارت تابع را یك بار در مزدوج خودش ضرب و یك بار بر آن تقسیم می‌کنیم تا به‌ازای $x=+\infty$ به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ درآید:

$$y=\frac{(3x+\sqrt{9x^2-x})\times(3x-\sqrt{9x^2-x})}{3x+\sqrt{9x^2-x}}=\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-x}}$$

حال برای رفع ابهام چنین عمل می‌کنیم:

$$y=\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-x}}=\frac{x}{x\left(3+\sqrt{9-\frac{1}{x}}\right)}=\frac{1}{3+\sqrt{9-\frac{1}{x}}}$$

که به ازای $x=+\infty$ مقدار y می‌شود:

$$y=\frac{1}{3+\sqrt{9}}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

توجه کنید! تابع فوق به ازای $x=-\infty$ مبهم نیست، چه در آن صورت به شکل $-\infty-\infty=-\infty$ درمی‌آید.

مثال ۲ـ اگر بخواهیم اندازهٔ حقیقی $y=2x+\sqrt{4x^2-5x}$ را به ازای $x=-\infty$ که به صورت مبهم $-\infty+\infty$ درمی‌آید بدست آوریم، چنین عمل می‌کنیم:

$$y=\frac{(2x+\sqrt{4x^2-5x})\cdot(2x-\sqrt{4x^2-5x})}{2x-\sqrt{4x^2-5x}}$$

$$=\frac{5x}{2x-\sqrt{4x^2-5x}}=\frac{5x}{x\left(2-\frac{\sqrt{4x^2-5x}}{x}\right)}$$

که چون x منفی است می‌توان آن را چنین نوشت:

$$y=\frac{5x}{x\left(2+\sqrt{4-\frac{5}{x}}\right)}=\frac{5}{2+\sqrt{4-\frac{5}{x}}}$$

می‌بینیم که به ازای $x=-\infty$ مقدار y می‌شود:

$$y=\frac{5}{2+\sqrt{4-\frac{5}{-\infty}}}=\frac{5}{2+2}=\frac{5}{4}$$

باید دانست که تابع فوق به ازای $x=+\infty$ مبهم نیست، چه در آن صورت به شکل $\infty+\infty=+\infty$ درمی‌آید.

مثال ۳ـ وقتی‌که x در حال تنزل به سمت ۱ میل کند، تابع $y=\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}$ به صورت $\infty-\infty$ در می‌آید. برای یافتن اندازهٔ حقیقی آن، مخرج مشترك می‌گیریم و دوکسر را **جمع** جبری می‌کنیم تا به‌ازای $x=1$ به صورت $\frac{0}{0}$ درآید:

$$y=\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x-1}=\frac{1-x}{x(x-1)}$$

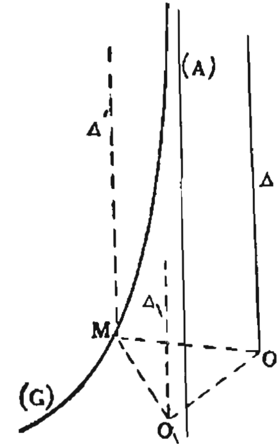
حال این کسر را ساده می‌کنیم می‌شود:

$$y=\frac{-1}{x}$$

و می‌بینیم که به ازای $x=1$، اندازهٔ حقیقی y مساوی -1 است.

مجانب

۴۶ـ راستا یا امتداد مجانب ـ می‌گوییم که منحنی (c) نمایش تابع $y=f(x)$ دارای شاخه‌ای بی‌اندازه دور است، اگر روی منحنی (c) نقطه هایی یافت شوند که طول یا عرض آنها یا هر دو



بی اندازه بزرگ ($+\infty$) یا بی اندازه کوچك ($-\infty$) باشد .

اگر (G) شاخهٔ بی‌اندازه دور منحنی (c) و M نقطه‌ای از این شاخه باشد ، چنانچه M را به نقطه‌ای دلخواه مانند O وصل‌کنیم ، وقتی‌که M روی شاخهٔ (G) حرکت‌کند و بی‌اندازه دور شود ، در حالت‌کلی خط OM دارای وضع حدی است مانند Δ که **راستای مجانب** شاخهٔ (G) نامیده می‌شود . باید دانست‌که این امتداد بستگی به جای نقطهٔ O ندارد ، چنانکه اگر O_1 نقطهٔ دیگری باشد ، Δ_1 **حد** O_1M نیز موازی Δ خواهد بود ، زیرا چون در مثلث O_1OM ضلع O_1O ثابت است و هنگامی‌که M بی‌اندازه دور می‌شود O_1M و OM هر دو بی‌اندازه بزرگ می‌شوند ، زاویهٔ M بی‌اندازه به صفر نزدیك می‌شود یا به عبارت دیگر O_1M و OM متوازی می‌شوند .

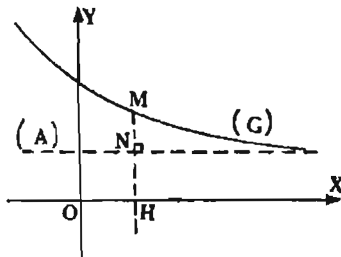
مجانب ــ حال اگر شاخهٔ (G) دارای امتداد مجانبی مانند Δ باشد ، از M خط Δ' را موازی این امتداد رسم می‌کنیم و می‌بینیم‌که آیا وقتی‌که M روی (G) بی‌اندازه دور می‌رود Δ' دارای وضع حدی هست یا نه . اگر دارای وضع حدی مانند (A) باشد ، A را **مجانب** شاخهٔ (G)می‌نامند ، واگر Δ' دارای وضع حدی نباشد ، می‌گویند که (G) دارای راستای مجانب Δ هست ولی مجانب موازی‌آن امتداد ندارد. یا می‌گویند (G) شاخه‌ای است پارابلی در امتداد Δ .

توجه کنید ! می‌توان‌گفت‌که Δ' قاطعی است که نقطهٔ بی‌اندازه دور منحنی را به نقطهٔ دیگری از منحنی یعنی M وصل‌کرده است ، پس مجانب A که حد این قاطع است هنگامی‌که M بی‌اندازه به‌آن نقطهٔ دور نزدیك می‌شود ، در واقع برآن نقطهٔ بی‌اندازه دور مماس است و واضح است‌که هراندازه M روی منحنی دورتر شود فاصلهٔ آن از مجانب A به صفر نزدیکتر می‌شود وحد این فاصله صفر است . پس می‌توان‌گفت :

خطی مجانب به‌یکی ازشاخه‌های بینهایت دوریك منحنی است ، وقتی که اگر نقطهٔ M در روی‌آن شاخه بی‌اندازه دور شود ، فاصله‌اش ازآن‌خط، به سمت صفرمیل‌کند .

۴۷ــ معادلهٔ مجانب ــ الف ــ مجانب موازی محور x ها ــ

اگر شاخهٔ (G) دارای مجانب (A) موازی با محور x ها به معادلهٔ $y=d$ باشد (شکل همین صفحه) ، واضح است‌که وقتی‌که M در روی منحنی بی‌اندازه دور شود ($x\to\infty$) ، MN ، فاصلهٔ M از مجانب به سمت صفر میل خواهد کرد و در نقطهٔ بینهایت دور ، M بر N منطبق می‌شود . یعنی عرض نقطهٔ بینهایت دور این منحنی همان



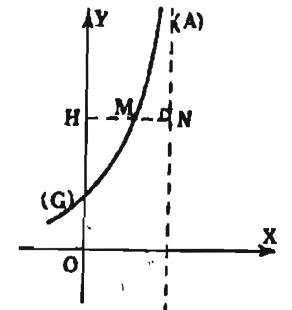
عرض مجانب (A) ، موازی با محور x هاست . بنابراین وقتی‌که تابع $y=f(x)$ ، به ازای $x=\infty$ دارای حدی برابر d باشد ، منحنی نمایش تغییرات آن تابع دارای مجانبی موازی محور x ها به معادلهٔ $y=d$ می‌باشد .

از آنچه‌گفتیم چنین نتیجه می‌شود :

برای پیداکردن مجانب موازی محور xها کافی است که در معادلهٔ منحنی ، حد y را به ازای $x=\infty$ بدست بیاوریم (به شرط وجود) ، اگر این حد برابر عدد ثابتی مانند d باشد ، خط $y=d$ مجانب‌آن منحنی است.

مثال- چون‌حد $y=\frac{x}{x-1}$ به ازای $x=\infty$ برابر ۱ است ، خط $y=1$ مجانب منحنی نمایش تابع $y=\frac{x}{x-1}$ می‌باشد .

ب ـ مجانب موازی محور yها ـ اگر شاخهٔ (G) دارای مجانب (A) موازی بامحور yها به‌معادلهٔ $x=a$ باشد(شکل مقابل) ، واضح است که وقتی‌که M در روی منحنی بی‌اندازه دور شود $(y\to\infty)$ ، MN ، فاصلهٔ M از مجانب ، به سمت صفر میل خواهد کرد ودر نقطهٔ بینهایت دور M بر N منطبق می‌شود . یعنی طول نقطهٔ بینهایت دوراین‌منحنی‌همان‌طول مجانب (A) ، موازی بامحور yهاست.



بنابراین وقتی‌که تابع $y=f(x)$ به ازای مقدار محدودی از $x(x=a)$ بینهایت می‌شود ، منحنی نمایش تغییرات آن تابع دارای مجانبی موازی محور yها به معادلهٔ $x=a$ می‌باشد .

از آنچه‌گفتیم نتیجه می‌شود :

برای پیدا کردن مجانب موازی محور yها کافی است که مقدار محدودی از x راکه به ازای آن $y=\infty$ می‌شود بدست بیاوریم . اگر این مقدار برابر عدد ثابتی مانند a باشد ، خط $x=a$ مجانب آن منحنی است .

مثال - منحنی‌نمایش تغییرات تابع $y=\frac{2x}{x-3}$ دارای مجانب

موازی با محور y ها به معادلهٔ $x=3$ می‌باشد ، زیرا به ازای $x=3$ مقدار y بینهایت می‌شود .

ج ـ مجانب غیر موازی با دو محور (مجانب مایل) ـ اگر شاخهٔ (G) دارای مجانب (A) مایل نسبت به دو محور مختصات باشد ، واضح است‌که x و y نقطهٔ بینهایت دور این شاخه، هردو از حیث قدر مطلق ، بی‌اندازه بزرگ می‌باشند .

برای بدست آوردن معادلهٔ مجانب مایل منحنی (G) به معادلهٔ $y=f(x)$ ، ابتدا امتداد مجانب آن را بدست می‌آوریم . برای این‌کار از نقطهٔ دلخواهی (مثلاً O مبدأ مختصات) خطی به M یکی از نقطه‌های (G) وصل‌می‌کنیم. هنگامی‌که M بی‌اندازه دورمی‌شود ، اگرخط OM دارای حدی مانند Δ باشد ، ضریب زاویه‌ای Δ ، حد ضریب زاویه‌ای OM، یا حد $\frac{y}{x}$ خواهد بود ، پس :

ضریب زاویه‌ای مجانب مایل منحنی $y=f(x)$ ، مساوی حد $\frac{y}{x}$ یا $\frac{f(x)}{x}$ است ، وقتی که x از حیث قدر مطلق بی‌اندازه بزرگ می‌شود (یا بطورکلی هنگامی‌که نقطهٔ M روی شاخهٔ G از منحنی ، بی‌اندازه دور می‌شود) .

پس از بدست آوردن ضریب زاویه‌ای امتداد مجانب ، چنانکه گفتیم ، از M خط Δ' را موازی امتداد مجانب می‌کشیم . اگرهنگامی که M بی‌اندازه دور می‌شود ، Δ' وضع حدی داشته باشد ، همان مجانب است . پس اگر حد $\frac{y}{x}$ را c بنامیم معادلهٔ Δ' چنین نوشته می‌شود :

$$Y-y=c(X-x)$$

یا :

$$Y=cX+(y-cx)$$

این خط به محور yها در نقطه‌ای به عرض $y-cx$ برمی‌خورد.

پس اگر (Δ') دارای وضع حدی باشد، $y-cx$ نیز حدی خواهد داشت که همان عرض از مبدأ مجانب موازی Δ است.

بطور خلاصه، **برای پیدا کردن مجانب مایل منحنی $y=f(x)$ و نوشتن معادلهٔ آن کافی است که، اول c، حد $\frac{y}{x}$ را بدست آوریم و بعد حد $y-cx$ را بیابیم. این حد اخیر اگر برابر d شود، معادلهٔ مجانب مایل چنین خواهد شد:**

$$Y=cX+d$$

اگر $\frac{y}{x}$ دارای حدی نباشد شاخهٔ بی‌اندازه دور منحنی امتداد مجانب ندارد و اگر $\frac{y}{x}$ دارای حدی مانند c باشد ولی $y-cx$ حد نداشته باشد منحنی دارای شاخه‌ای بی‌اندازه دور می‌باشد که در امتداد c پارابلی است.

مثال ۱- اگر به x در تابع $y=\frac{2x^2}{x-3}$ بترتیب $-\infty$ و $+\infty$ نسبت دهیم، y نیز بترتیب $-\infty$ و $+\infty$ خواهد شد. پس منحنی نمایش این تابع ممکن است دارای مجانب مایل باشد. برای بدست آوردن معادلهٔ آن ابتدا $\frac{y}{x}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{y}{x}=\frac{2x}{x-3}$$

و حد $\frac{y}{x}$ را هنگامی که x به سمت $-\infty$ یا $+\infty$ میل کند بدست می‌آوریم، می‌بینیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{2x}{x-3}=2$$

پس ضریب زاویه‌ای امتداد مجانب برابر ۲ است. اکنون حد $y-2x$ را به ازای $x\to\pm\infty$ حساب می‌کنیم:

$$y-2x=\frac{2x^2}{x-3}-2x=\frac{6x}{x-3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-2x)=6$$

پس معادلهٔ خط مجانب مایل این منحنی چنین می‌شود:

$$y=2x+6$$

این خط بر هر دو شاخهٔ بینهایت دور منحنی (شاخه‌های نظیر $x=-\infty$ و $x=+\infty$) مجانب است.

توجه کنید! اگر صورت عبارت تابع مثال ۱، یعنی $2x^2$، را برمخرج آن، یعنی $x-3$، تقسیم کنیم، خارج قسمت $2x+6$ و باقیمانده $+18$ می‌شود. به عبارت خارج قسمت نگاه کنید! می‌بینید که همان عبارت تابع خطی مجانب مایل، برحسب x است. بنابراین ممکن بود که با تقسیم کردن صورت کسر برمخرج آن، $2x+6$ و در نتیجه معادلهٔ مجانب مایل $y=2x+6$ را بدست آوریم. این مطلب را می‌توان عمومیت داد و گفت:

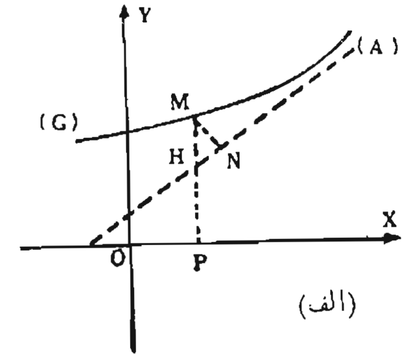
در تابع کسری یعنی تابعی که به این صورت است: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ (f و g دو چندجمله‌ای بدون ریشهٔ مشترکند)، اگر درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج یك واحد بیشتر باشد، خارج قسمت $f(x)$ بر $g(x)$ به‌صورت $ax+b$ خواهد بود. خطی که معادلهٔ آن $y=ax+b$ باشد، مجانب مایل منحنی نمایش تغییرات آن تابع است، زیرا می‌توان نوشت:

$y=ax+b+\frac{R(x)}{g(x)}$ که واضح است درجهٔ $R(x)$ از درجهٔ $g(x)$ کمتر می‌باشد. حال اگر خط (A) به معادلهٔ $y_1=ax+b$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت :

$$y=y_1+\frac{R(x)}{g(x)}$$

یا :

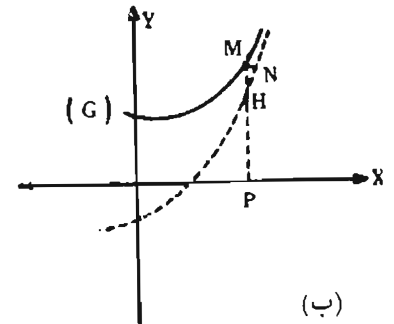
$$y-y_1=\frac{R(x)}{g(x)}$$



(الف)

می‌بینیم که وقتی که $|x|$ به سمت ∞ میل کند ، $y-y_1$ صفر می‌شود (زیرا همچنانکه گفته شد درجهٔ R ازدرجهٔ g کمتر است) ، اما $|y-y_1|$ یعنی MH (شکل الف) از MN (فاصلهٔ M ازخط A) بزرگتراست. بنابراین هنگامی که $|x|$ به سمت ∞ میل می‌کند ، MN ، فاصلهٔ نقطهٔ منحنی از خط (A) ، به سمت صفر میل می‌کند ، یعنی خط (A) مجانب منحنی است.

بطورکلی درحالتی که درجهٔ صورت بیش ازدرجهٔ مخرج باشد، اگر $\varphi(x)$ خارج قسمت تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ باشد ، به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که **منحنی نمایش $y_1=\varphi(x)$ مجانب منحنی نمایش تابع** $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ است (شکل ب).



(ب)

مثال ۲ - تعیین مجانبهای منحنی نمایش تابع :

$$y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$$

اولاً ـ اگر x را $-\infty$ بگیریم، y به صورت مبهم $-\infty+\infty$ در می‌آید که چون از آن رفع ابهام کنیم ، خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to-\infty} y=\frac{3}{2}$$

پس شاخه‌ای از منحنی نمایش این تابع که در ازای x های بسیار کوچك $(-\infty)$ بدست می‌آید ، مجانبی موازی محور x ها به معادلهٔ $y=\frac{3}{2}$ دارد .

ثانیاً ـ اگر x را $+\infty$ بگیریم y نیز $+\infty$ می‌شود ، پس منحنی شاخهٔ بینهایت دور دیگری دارد که ممکن است دارای مجانب مایل باشد. برای یافتن این مجانب، ابتدا حد $\frac{y}{x}$ را به ازای $x=+\infty$ بدست می‌آوریم :

$$\frac{y}{x}=1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

پس :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=2$$

بعد حد $y-2x$ را به ازای $x=+\infty$ معین می‌کنیم،داریم :

$$y-2x=-x+\sqrt{x^2-3x+2}$$

که چون به ازای $x=+\infty$ به صورت مبهم $-\infty+\infty$ است می‌نویسیم:

$$y-2x=\frac{(-x+\sqrt{x^2-3x+2})(-x-\sqrt{x^2-3x+2})}{-x-\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$=\frac{3x-2}{-x-\sqrt{x^2-3x+2}}=\frac{3-\frac{2}{x}}{-1-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

از آنجا :

$$\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$$

بنابراین معادلهٔ مجانب مایل این منحنی چنین است :

$$y=2x-\frac{3}{2}$$

تمرین

الف ـ اندازهٔ حقیقی هر یك از تابعهای زیر را به ازای اندازهٔ مخصوصی از متغیرکه در مقابل آن نوشته شده است بدست آورید :

ـ۱ $y=\frac{\cos 3x}{\cos x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{2}$

ـ۲ $y=\frac{tg 2x}{tg x}$ به ازای $x=0$

ـ۳ $y=\frac{x^3-x}{x+1}$ به ازای $x=-1$

ـ۴ $y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ به ازای $x=2$

ـ۵ $y=\frac{2x-6}{4-\sqrt{5x+1}}$ به ازای $x=3$

ـ۶ $y=\frac{x+1}{3-\sqrt{2-7x}}$ به ازای $x=-1$

ـ۷ $y=\frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1}$ به ازای $x=-\frac{1}{2}$

ـ۸ $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$ به ازای $x=-1$

ـ۹ $y=\frac{cotg\, x}{cotg\, 3x}$ به ازای $x=0$

ـ۱۰ $y=\frac{tg 3x}{tg x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{2}$

ـ۱۱ $y=\frac{x+3}{x^2-2x+1}$ به ازای $x=\pm\infty$

ـ۱۲ $y=\frac{3x^2-5x+1}{x^2+1}$ به ازای $x=\pm\infty$

ـ۱۳ $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}$ به ازای $x=\pm\infty$

ـ۱۴ $y=\frac{1-2x^2}{x^2+x}$ به ازای $x=\pm\infty$

ـ۱۵ $y=\frac{x+1+\frac{x+1}{x-3}}{x+\frac{x^2}{x-3}}$ به ازای $x=3$

ـ۱۶ $y=\frac{-x+3\sqrt{x}+4}{7\sqrt{x}+2x-2}$ به ازای $x=+\infty$

-۱۷ $y=(x^2-4)\times\frac{x+1}{x^2-3x+2}$ به ازای $x=2$

-۱۸ $y=(9-x^2)\frac{x+2}{x^2+x-12}$ به ازای $x=3$

-۱۹ $y=\cos 3x \cdot tg\, x$ به ازای $x=\frac{\pi}{2}$

-۲۰ $y=\frac{(x^2-2)(x-1)^4}{x^2(x+1)^3}$ به ازای $x=\pm\infty$

-۲۱ $y=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}$ به ازای $x=0$

-۲۲ $y=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-x-2}$ به ازای $x=-1$

-۲۳ $y=x-\sqrt{x^2-x}$ به ازای $x=+\infty$

-۲۴ $y=-2x+\sqrt{4x^2-3x}$ به ازای $x=+\infty$

-۲۵ $y=\sqrt{9x^2+2x}-3x$ به ازای $x=\pm\infty$

-۲۶ $y=x+\sqrt{x^2-3}$ به ازای $x=\pm\infty$

-۲۷ $y=3x-\sqrt{x^2-x+1}$ به ازای $x=\pm\infty$

-۲۸ $y=\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-7x+3}$ به ازای $x=\pm\infty$

-۲۹ $y=\sqrt{x-1}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})$ به ازای $x=\pm\infty$

-۳۰ $y=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ به ازای $x=\pm\infty$

-۳۱ $y=\sqrt{x^2-4x+3}-2x+5$ به ازای $x=\pm\infty$

ب ـ معادلات مجانبهای منحنیهای‌معادلات زیر را پیدا کنید :

-۱ $y=\frac{2x+1}{x-2}$ -۲ $y=\frac{1}{x-3}$

-۳ $y=\frac{1}{x}$ -۴ $y=\frac{2x^3+1}{x^2-1}$

-۵ $y=\frac{3x^2-2x}{x^2-4}$ -۶ $y=\frac{(x-1)^2}{x^2-5x+6}$

-۷ $y=\frac{4x+1}{x^2-9}$ -۸ $y=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

-۹ $y=\frac{x^2}{x+1}$ -۱۰ $y=\frac{2x^3+1}{x^2-2x+1}$

-۱۱ $y=x+2+\frac{1}{x}$ -۱۲ $y=2x-1-\frac{x-1}{x^2-4}$

-۱۳ $y=\frac{x^2}{x+1}$ -۱۴ $y=\frac{2x^3-x^2+1}{x-2}$

-۱۵ $y=\frac{2x^4-1}{x^3+x}$ -۱۶ $y=\frac{x^4}{x+1}$

-۱۷ $y=\sqrt{x^3-1}$ -۱۸ $y=\sqrt{x^2-4x-3}$

-۱۹ $y=x-\sqrt{x^2+1}$ -۲۰ $y=x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

-۲۱ $y=\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}$ -۲۲ $y=1-x+\sqrt{x^2+4x}$

-۲۳ $y=\frac{4x}{\sqrt{x^3-1}}$ -۲۴ $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$

-۲۵ $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ -۲۶ $y=\sqrt{x^3-4x^2}$

-۲۷ $y=3x+\sqrt{x^2+1}$ -۲۸ $y=3x-\sqrt{x^2+4x-5}$

-۲۹ a را طوری بدست‌آورید که منحنی $y=\frac{ax+2}{3x-1}$ دارای مجانبی به معادلهٔ $y=2$ باشد .

۳۰- m را بقسمی تعیین کنید که منحنی $y=\frac{ax+1}{2x-m}$ دارای مجانبی به معادلهٔ $x=3$ باشد.

۳۱- a و b را چنان تعیین کنید که مجانبهای منحنی $y=\frac{ax+2b}{bx+1}$ به معادله‌های $x=2$ و $y=-3$ باشند.

۳۲- m و n را چنان پیداکنید که منحنی $y=\frac{3mx^2+nx+1}{mx+2}$ دارای دو مجانب به معادله‌های $y=3x$ و $x=1$ باشد.

۳۳- a وb را بقسمی بیابید که مجانب منحنی $y=\frac{ax^2+bx-7}{x-1}$ به معادلهٔ $y=2x+3$ باشد.

فصل چهارم

رسم منحنی نمایش تغییرات توابع

I ـ توابعی که به شکل چندجمله‌ای می‌باشند

۴۸ـ یادآوری ـ در جبر کلاس پنجم دیدیدکه در عمل، برای رسم منحنی نمایش تغییرات یك تابع باید قاعدهٔ زیررا بکار برد:

قاعده ــ ۱) معلوم‌کردکه تابع در چه فواصلی از متغیر معین‌ومتصل است.

۲) مشتق تابع را حساب‌کرد وآن را تعیین علامت نمود و از روی آن جهت تغییرات تابع را معین‌کرد.

۳) تمام مقادیر مخصوص، یعنی مقادیری را که به ازای آنها تابع منفصل می‌شودیا مشتق تابع تغییرعلامت می‌دهد به ترتیب صعودی در جدولی نوشت تا فواصلی برای تغییرات متغیر بدست‌آید. ودر هرفاصله معین‌کرد که تابع صعودی یا نزولی است. در هریك ازاین فاصله‌ها تابع متصل است و جهت تغییراتش ثابت می‌باشد.

۴) مقادیرتابع را در ازای اندازه‌های مخصوص متغیر که درجدول نوشته شده است حساب کرد و در جدول نوشت.

۵) از روی جدول، بعد ازبدست‌آوردن‌نقاط مخصوص منحنی‌نمایش تغییرات تابع را رسم‌کرد.

۴۹ـ رسم منحنی نمایش تغییرات توابعی که به شکل چند جمله‌ای می‌باشند:

الف ـ رسم نمایش هندسی تابع درجهٔ اول $y=ax+b$ ـ

این تابع به ازای جمیع مقادیر x معین و اتصالی‌است. مشتق‌آن $y'=a$

۳۰- m را بقسمی تعیین‌کنید که منحنی $y=\frac{ax+1}{2x-m}$ دارای مجانبی به معادلهٔ $x=3$ باشد.

۳۱- a و b را چنان تعیین‌کنیدکه مجانبهای منحنی $y=\frac{ax+2b}{bx+1}$ به معادله‌های $x=2$ و $y=-3$ باشند.

۳۲- m و n را چنان پیداکنیدکه منحنی $y=\frac{3mx^2+nx+1}{mx+2}$ دارای دو مجانب به معادله‌های $y=3x$ و $x=1$ باشد.

۳۳- a وbرا بقسمی بیابیدکه مجانب منحنی $y=\frac{ax^2+bx-7}{x-1}$ به معادلهٔ $y=2x+3$ باشد.

فصل چهارم

رسم منحنی نمایش تغییرات توابع

I ـ توابعی که به شکل چندجمله‌ای می‌باشند

۴۸- یادآوری ـ در جبر کلاس پنجم دیدیدکه در عمل، برای رسم منحنی نمایش تغییرات یك تابع باید قاعدهٔ زیررا بکار برد:

قاعده ـ ۱) معلوم‌کردکه تابع در چه فواصلی از متغیر معین‌ومتصل است.

۲) مشتق تابع را حساب‌کرد وآن را تعیین علامت نمود و از روی آن جهت تغییرات تابع را معین‌کرد.

۳) تمام مقادیر مخصوص، یعنی مقادیری را که به ازای آنها تابع منفصل می‌شودیا مشتق تابع تغییرعلامت می‌دهد به ترتیب صعودی در جدولی نوشت تا فواصلی برای تغییرات متغیر بدست‌آید. ودر هرفاصله معین‌کرد که تابع صعودی یا نزولی است. در هریك ازاین فاصله‌ها تابع متصل است و جهت تغییراتش ثابت می‌باشد.

۴) مقادیرتابع را در ازای اندازه‌های مخصوص متغیر که درجدول نوشته شده است حساب کرد و در جدول نوشت.

۵) از روی جدول، بعد ازبدست‌آوردن‌نقاط مخصوص منحنی‌نمایش تغییرات تابع را رسم‌کرد.

۴۹- رسم منحنی نمایش تغییرات توابعی که به شکل چند جمله‌ای می‌باشند:

الف ـ رسم نمایش هندسی تابع درجهٔ اول $y=ax+b$ ـ

این تابع به ازای جمیع مقادیر x معین و اتصالی‌است. مشتق‌آن $y'=a$

از حیث مقدار و علامت ثابت است . هنگامی‌که $a>0$ ، تابع همواره صعودی است و در حالتی‌که $a<0$ ، تابع همواره نزولی است . منحنی نمایش تغییرات‌تابع درجهٔ اول خط مستقیم است . این خط مستقیم (که با معلوم بودن دو نقطهٔ آن رسم می‌شود) در حالتی که $a>0$ ، از چپ به راست ، از پایین به بالا می‌رود . در حالتی که $a<0$ ، از چپ به راست ، از بالا به‌پایین می‌رود . درحالتی‌که $a=0$ ، تابع ثابت وخط نمایش آن موازی محور xهاست .

ب ـ رسم منحنی نمایش تغییرات تابع $y=ax^2+bx+c$
(تابع درجهٔ دوم) ـ این تابع چون به شکل چند جمله‌ای است، به‌ازای جمیع مقادیر x معین و اتصالی است . مشتق تابع $y'=2ax+b$ از درجهٔ اول است ، پس همیشه یك ریشهٔ حقیقی $\frac{-b}{2a}$ دارد. و علامت آن به ازای اندازه‌های x کوچکتر از $-\frac{b}{2a}$ ، مخالف علامت $2a$ (یا a) و به ازای مقادیر بزرگتر از $-\frac{b}{2a}$ ، موافق علامت a می‌باشد. چنانچه a مثبت باشد ، نقطه‌ای به مختصات ($\frac{4ac-b^2}{4a}$ و $-\frac{b}{2a}$) پایین‌ترین نقطهٔ منحنی تغییرات تابع (نظیر مینیمم تابع) ، واگر a منفی باشد آن نقطه بالاترین نقطهٔ منحنی نمایش تغییرات تابع (نقطهٔ نظیر ماکزیمم تابع) می‌باشد . ضمناً چون $y''=2a$ ، اگر a مثبت باشد ، تقعرمنحنی به‌سمت بالا و اگر a منفی باشد ، تقعر منحنی به سوی پایین است . منحنی نمایش تغییرات تابع درجهٔ دوم را **سهمی** و نقطهٔ نظیر ماکزیمم یا مینیمم تابع را رأس آن سهمی می‌نامند . خط $x=-\frac{b}{2a}$ که موازی

محور y هاست واز رأس سهمی می‌گذرد محور تقارن‌آن است .

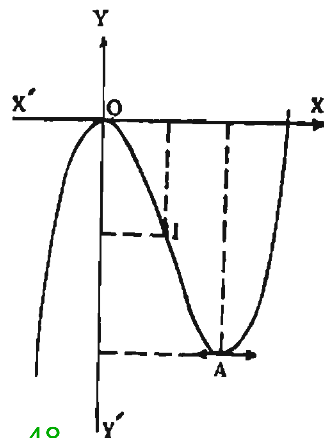
ج ـ رسم منحنی نمایش تغییرات تابع درجهٔ سوم ـ مثال ۱ ـ
رسم منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^3-3x^2$.

۱ ـ چون این تابع‌چند جمله‌ای است ، به ازای همهٔ مقادیر x معین و اتصالی است .

۲ ـ مشتق تابع $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$ دارای دو ریشهٔ صفر و ۲ است . در فاصلهٔ (۲ ، ۰) مشتق منفی و در فواصل دیگر مثبت می‌باشد .

۳ـ و ۴ ـ جدول تغییرات این تابع چنین است :

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۰ ماکزیمم	↘	−۴ مینیمم	↗	$+\infty$



۵ ـ منحنی نمایش تغییرات این تابع ،که به شکل مقابل است، محور xها را در نقطه‌ای بطول ۳ قطع می‌کند و در مبدأ مختصات بر این محور مماس است (چرا ؟) .

چنانکه از شکل پیداست جهت تقعّر منحنی بین دو نقطهٔ

O و A تغییر می‌کند . چون مشتق دوم تابع را حساب کنیم: $(y''=6x-6)$ می‌بینیم که به ازای $x=1$ تغییر علامت می‌دهد . پس نقطهٔ I(۱ و ۲−) نقطهٔ عطف منحنی است .

مثال ۲ ـ $y=-x^3+6x^2-9x+2$

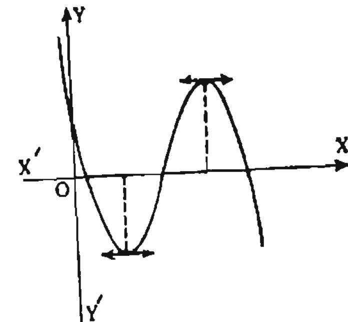
۱ـ این تابع به ازای جمیع مقادیر x معین و اتصالی است .

۲ـ مشتق تابع $y'=-3x^2+12x-9=-3(x^2-4x+3)$ دارای دو ریشهٔ ۱ و ۳ است . در فاصلهٔ (۱،۳) مشتق مثبت و در فواصل دیگر منفی است .

۳ـ و ۴ـ جدول تغییرات این تابع چنین است :

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
y'		−	۰	+	۰	−	
y	$+\infty$	↘	−۲ مینیمم	↗	+۲ ماکزیمم	↘	$-\infty$

۵ـ منحنی نمایش تغییرات این تابع به شکل مقابل است(این منحنی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند).



این منحنی نیز دارای یك نقطهٔ عطف (۰ و ۲) است .

مثال ۳ـ $y=x^3+x$

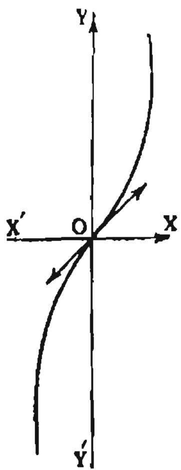
۱ ـ این تابع به ازای جمیع مقادیر x معین و متصل است .

۲ ـ مشتق ، $y'=3x^2+1$ ، ریشه ندارد و همواره مثبت است .

۳ ـ و ۴ ـ جدول تغییرات تابع چنین است :

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

۵ ـ چون ازروی جدول فوق فقط جهت تغییرات تابع مشخص است برای آنکه منحنی نمایش تغییرات تابع رسم شود ، قبلاً چند نقطه ازآن را بدلخواه معین می‌کنیم و خواهیم دید که به شکل مقابل است (این منحنی ازمبدأ مختصات می‌گذرد واین نقطه نقطهٔ عطف آن است) و مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است .



مثال ۴ـ $y=-\frac{x^3}{3}+2x^2-4x-\frac{1}{3}$

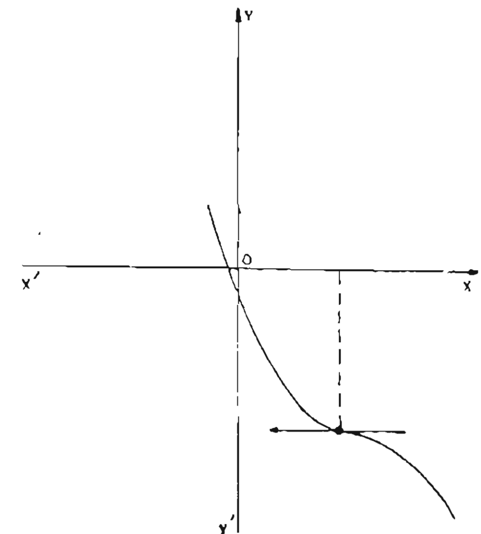
۱ ـ این تابع به ازای جمیع مقادیر x معین و متصل است .

۲ ـ مشتق تابع، $y'=-x^2+4x-4$ ، به‌ازای ریشهٔ مضاعف $x=2$ برابر صفر وبه ازای جمیع مقادیر دیگر منفی است .

۳ ـ و ۴ ـ جدول تغییرات تابع چنین است :

x	−∞		۰		۲		+∞
y'		−			۰	−	
y	+∞	↘	$-\frac{۱}{۳}$	↘	−۳ نقطهٔ عطف	↘	−∞

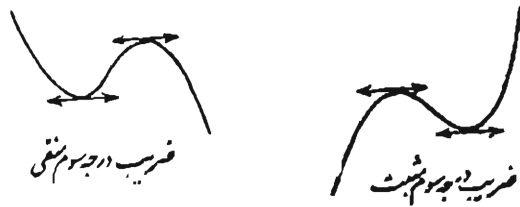
۵ ـ منحنی نمایش تغییرات این تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{۱}{۳}$ قطع می‌کند و چون چند نقطه از آن را بدلخواه تعیین کنیم می‌بینیم که به شکل مقابل است . نقطهٔ (۳− و ۲) نقطهٔ عطف آن است .



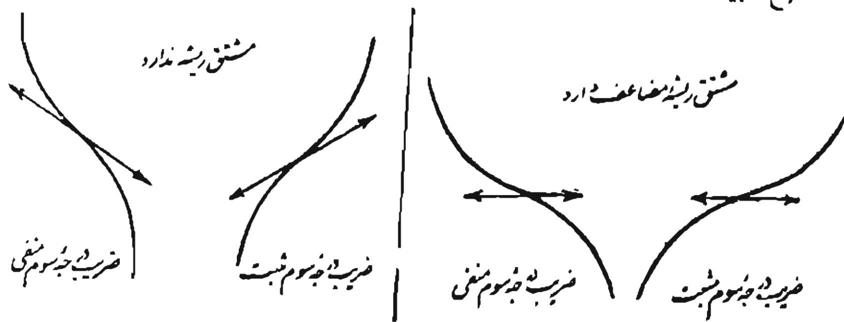
توجه کنید ! مشتق یك تابع درجهٔ سوم یك سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم است، و چنانکه در مثالهای فوق دیدیم ، ممکن است این سه جمله‌ای دو ریشهٔ متمایز یا یك ریشهٔ مضاعف داشته باشد ، یا اصلاً ریشه نداشته باشد .

درحالی‌که مشتق دوریشهٔ متمایز داشته باشد ، تابع دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم است و با وضع معمولی محورهای مختصات ، منحنی

نمایش تغییرات آن به یکی از دو شکل زیر است :



درحالی‌که مشتق دارای ریشهٔ مضاعف باشد یا آنکه ریشه نداشته باشد ، تابع دارای ماکزیمم و مینیمم نیست (جهت تغییرات تابع تغییر نمی‌کند) و با وضع معمولی محورهای مختصات ، منحنی نمایش تغییرات تابع شبیه یکی از شکلهای زیر است :



درهمه حال ، چون مشتق ثانی تابع ، دوجمله‌ای درجهٔ اول است و همواره دارای یك ریشهٔ حقیقی است ، منحنی نمایش تغییرات آن دارای یك نقطهٔ عطف است .

د ـ رسم منحنی نمایش تغییرات تابع دو مجذوری

مثال ۱ـ $y=\frac{۱}{۴}(x^{۴}-۸x^{۲}+۷)$

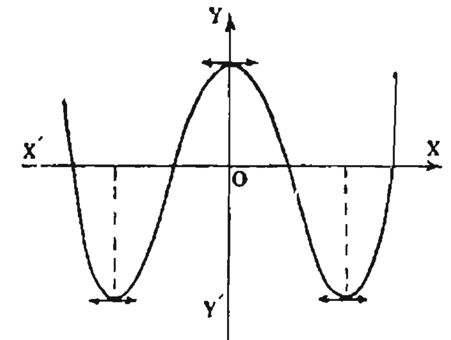
۱ـ این تابع به ازای جمیع مقادیر x معین و متصل است .

۲ـ مشتق ، $y'=\frac{1}{4}(4x^3-16x)=x(x^2-4)$ ، دارای یك ریشهٔ صفر ودوریشهٔ قرینهٔ ۲ و ۲− می‌باشد وسه‌بار تغییرعلامت می‌دهد.

۳ـ و۴ـ جدول تغییرات این تابع چنین است :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		−	۰	+	۰	−	۰	+	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{4}$ مینیمم	↗	$\frac{7}{4}$ ماکزیمم	↘	$-\frac{9}{4}$ مینیمم	↗	$+\infty$

۵ـ منحنی نمایش تغییرات این تابع ، محور yها را درنقطه‌ای به عرض $\frac{7}{4}$ (ماکزیمم تابع) و محور x ها را در چهار نقطه به طولهای $x=\pm1$ و $x=\pm\sqrt{7}$ (ریشه های $x^4-8x^2+7=0$) قطع می‌کند و به شکل مقابل



است. این منحنی‌دارای دو نقطهٔ عطف به‌طولهای $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ است .

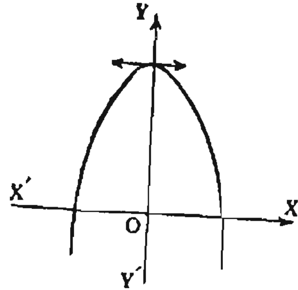
مثال۲ـ $y=-x^4-x^2+2$

۱ـ این تابع به ازای جمیع مقادیر x معین و متصل است .

۲ـ مشتق تابع ، $y'=-4x^3-2x=-2x(2x^2+1)$ ، فقط دارای ریشهٔ صفراست ویك بارتغییرعلامت می‌دهد (از مثبت به منفی) .

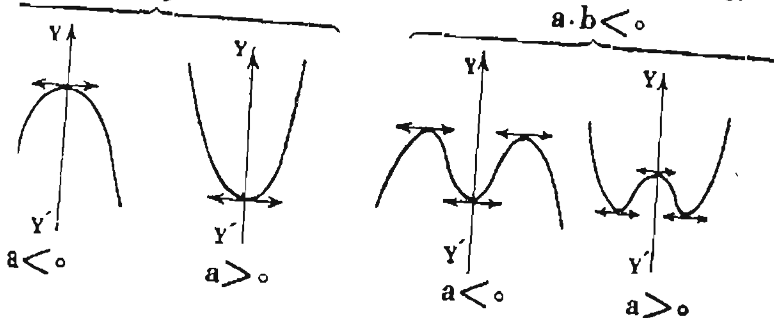
۳ـ و ۴ـ جدول تغییرات این تابع چنین است:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y	$-\infty$	↗	۲ ماکزیمم	↘	$-\infty$



۵ـ منحنی نمایش تغییرات این تابع محور y ها رادرنقطه‌ای به‌عرض ۲ و محور x ها را در دو نقطه به‌طولهای ۱± تلاقی می‌کند که به‌شکل مقابل‌است . این منحنی نقطهٔ عطف ندارد .

توجه‌کنید ! منحنی نمایش تغییرات تابع دومجذوری $y=ax^4+bx^2+c$ ، همواره نسبت به محور yها قرینه است (چرا؟) وبرحسب اندازه‌های عددی a ، b و c شبیه یکی ازشکلهای زیراست:



۵۰ ـ درهرموردکه بتوان ریشه‌های مشتق یك تابع چند جمله‌ای را حساب‌کرد ، می‌توان جدول تغییرات و منحنی نمایش آن را بآسانی رسم‌کرد . از این قبیل است تابعهای زیر :

$y=ax^5+bx^3+cx+d$ و $y=ax^6+bx^4+cx^2+d$ وغیره .

II ـ توابع کسری

۵۱ ـ تعریف ـ می‌دانیدکه مقصود از تابع کسری ، تابعی است به‌شکل خارج قسمت دوچند جمله‌ای .

الف ـ رسم منحنی نمایش تغییرات تابع هموگرافیك ـ در جبرسال پنجم دیدیدکه اگر مخرج تابع کسری از درجهٔ اول وصورت آن نیز از درجهٔ اول یا مقداری ثابت باشد ،آن را تابع **هموگرافیك** می‌گویند.

بنابراین شکل‌کلی تابع هموگرافیك چنین است :

$$y=\frac{ax+b}{a'x+b'} \qquad (a'\neq 0)$$

منحنی نمایش تغییرات تابع هموگرافیك به نام **هذلولی** است .

تابع هموگرافیك ومنحنی نمایش تغییرات آن دارای خواص زیر است :

۱ـ به ازای $x=-\frac{b'}{a'}$ (ریشهٔ مخرج) ، تابع منفصل و به ازای جمیع مقادیر دیگر متصل است .

۲ ـ مشتق این تابع ، $y'=\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}$ ، کسری است که صورت آن عدد ثابت $ab'-ba'$ (مثبت یا منفی) و مخرجش مربع یك

دوجمله‌ای است . بنابراین علامت مشتق ، همان علامت $ab'-ba'$ و همواره ثابت است ، یعنی تابع یا دائماً صعودی است (وقتی که $ab'-ba'>0$) یا دائماً نزولی است (وقتی که $ab'-ba'<0$)(*)

۳ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع، مانند هرهذلولی ، از دوشاخه تشکیل می‌شود و دارای دو خط مجانب موازی با محورهای **مختصات** است. مجانب موازی با محور xها به معادلهٔ $y=\frac{a}{a'}$ و مجانب موازی محور yها به معادلهٔ $x=-\frac{b'}{a'}$ می‌باشد (این معادلهٔ اخیر از صفر کردن مخرج تابع بدست می‌آید) .

۴ ـ محل‌تلاقی دومجانب یعنی نقطه‌ای به‌مختصات $\left(-\frac{b'}{a'}\right.$ و $\left.\frac{a}{a'}\right)$ مرکز تقارن منحنی است .

۵ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع هموگرافیك نسبت به مجانبها

(*) در حالت استثنایی است که $ab'-ba'=0$ یا $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ ، تابع ثابت است و بستگی به x ندارد زیرا اگر مقدار مشترك $\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$ را k بگیریم خواهیم داشت :

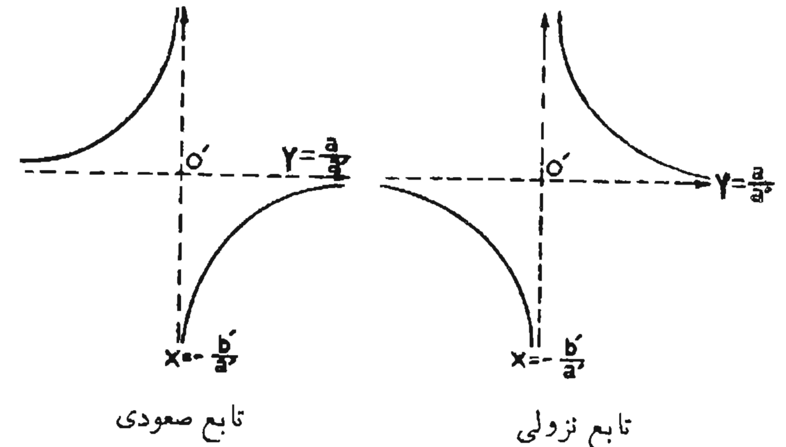
$$a=ka' \quad \text{و} \quad b=kb'$$

و از آنجا :

$$y=\frac{ax+b}{a'x+b'}=\frac{k(a'x+b')}{a'x+b'}=k$$

یعنی در این حال ، کسر ساده می‌شود وتابع هموگرافیك نیست و نمایش آن خطی است مستقیم .

شبیه یکی از دو شکل زیر است :



تابع صعودی   تابع نزولی

دراین دوشکل محورهای مختصات راکه موازی مجانبها می‌باشند رسم نکرده‌ایم .

توجه‌کنید ! قبل ازرسم منحنی نمایش تغییرات یك تابع ، باید مجانبهای آن را (مایل یا موازی با محورها ، در صورت وجود) رسم کرد و بعد با استفاده از آنها ، منحنی راکشید .

ب ـ تغییرات و رسم منحنی نمایش تغییرات توابع کسری که مخرج آنها از درجهٔ دوم باشد و درجهٔ صورت آنها از۲ تجاوز نکند یا توابعی که به صورت $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ $(a'\neq 0)$ **باشد .**

دوحالت اتفاق می‌افتد : اول‌آنکه مخرج‌ریشه نداشته باشد ،در نتیجه تابع همواره اتصالی است . دوم آنکه مخرج دارای ریشه باشد ، یعنی تابع به‌ازای یك یا دومقداراز x منفصل شود. **در هردوحال منحنی نمایش تغییرات اینگونه توابع همیشه یك مجانب موازی با محور xها به معادلهٔ** $y=\frac{a}{a'}$ **دارد .**

حالت اول ـ مخرج ریشه ندارد .

مثال ۱ـ $y=\frac{x}{x^2+1}$

۱ـ چون مخرج ریشه ندارد ، این تابع به ازای جمیع مقادیر x متصل است .

۲ـ مشتق این تابع ، $y'=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ به ازای $x=\pm 1$ (ریشه‌های صورت) صفرمی‌شود و تغییر علامت می‌دهد . به ازای مقادیر x بین این دوریشه ، مشتق مثبت و به ازای مقادیر خارج این دو ریشه، منفی است .

۳ ـ و ۴ ـ جدول تغییرات تابع چنین است:

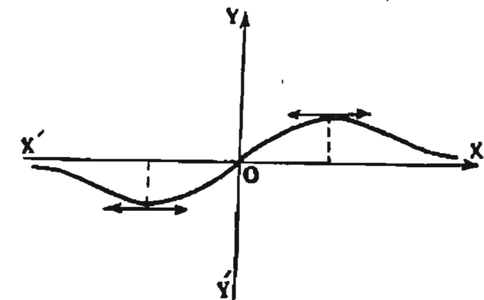
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		−	0	+		+	0	−	
y	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0
			مینیمم				ماکزیمم		

مقادیر مخصوص x ، عبارت از ۱− و ۱+ است‌که به‌ازای‌آنها مشتق صفر می‌شود . به این ترتیب فواصل تغییرات x عبارتند از : (۱−،∞−) و (۱،۱−) و (∞،۱) . در فواصل اول و سوم تابع نزولی و در فاصلهٔ (۱،۱−) تابع صعودی است .

اندازهٔ y به‌ازای ∞− ، ۱− ، ۱ و ∞+ بترتیب ۰ ، $-\frac{1}{2}$ ،

$\frac{1}{2}$ و ۰ است که درجدول می‌نویسیم .

۵ـ منحنی نمایش تغییرات تابع را با توجه به اینکه از مبدأ مختصات می‌گذرد و خط $y=0$ ، یعنی محور $x'ox$ ، مجانب آن است چنین می‌کشیم :



تبصره ـ اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم، y بدل به $-y$ می‌شود . پس مبدأ مختصات، مرکز تقارن منحنی نمایش این تابع است . بنابراین برای رسم منحنی نمایش تغییرات تابع ، وقتی‌که x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند ، می‌توانیم ابتدا منحنی تغییرات y را وقتی‌که x از $-\infty$ تا ۰ تغییر می‌کند رسم کنیم و بعد قرینهٔ آن را نسبت به مبدأ بکشیم . نقطهٔ o که مرکز تقارن است نقطهٔ عطف منحنی نیز هست .

مثال ۲ـ $y=\frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5}$

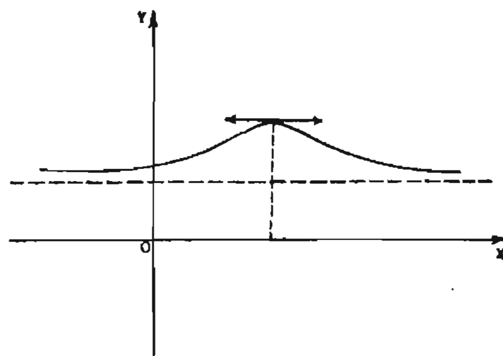
۱ـ چون مخرج ریشه ندارد ، این تابع به ازای جمیع مقادیر x متصل است .

۲ـ مشتق آن ، $y'=\frac{-2x+4}{(x^2-4x+5)^2}$ ، به ازای $x=2$ صفر می‌شود. به ازای $x<2$ مشتق مثبت و به ازای $x>2$ مشتق منفی است.

۳ ـ و ۴ ـ جدول تغییرات تابع چنین است :

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		+	+		۰	−	
y	۱	↗	$\frac{6}{5}$	↗	۲ ماکزیمم	↘	۱

۵ ـ با توجه به اینکه خط $y=1$ مجانب منحنی نمایش تغییرات تابع است ، آن را رسم می‌کنیم (این منحنی محور yها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{6}{5}$ قطع می‌کند) .



خط $x=2$ محور تقارن منحنی فوق است (چرا ؟) .

حالت دوم ـ مخرج دارای ریشه است .

مثال ۱ـ $y=\frac{x-2}{x^2-1}$

۱ـ این تابع به ازای دو مقدار $x=\pm 1$ منفصل و در فواصل: $(-\infty , -1)$ و $(-1 , +1)$ و $(1 , \infty)$ متصل است.

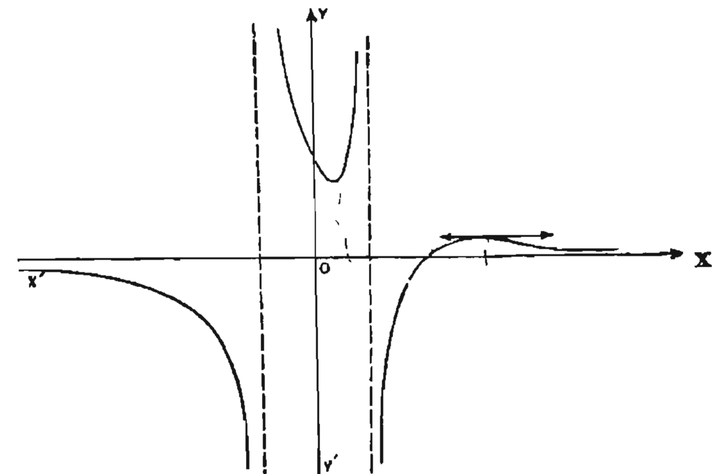
۲ ـ مشتق ، $y'=\frac{-x^2+4x-1}{(x^2-1)^2}$ ، به ازای دو مقدار

$x=2\pm\sqrt{3}$ صفر می‌شود ، و در فواصل $(-\infty ، 2-\sqrt{3})$ و $(2+\sqrt{3} ، +\infty)$ منفی و درفاصلهٔ $(2-\sqrt{3} ، 2+\sqrt{3})$ مثبت است .

۳ـ و ۴ـ جدول تغییرات تابع چنین است :

x	$-\infty$		-1		$2-\sqrt{3}$		1		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		−	‖	−	0	+	‖	+	0	−	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ مینیمم	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ماکزیمم	↘	0

۵ ـ با توجه به اینکه منحنی نمایش این تابع دارای سه خط مجانب است به معادلات : $x=-1$ ، $x=+1$ و $y=0$ و محور x ها را درنقطه‌ای به طول ۲ و محور y ها را درنقطه‌ای به‌عرض ۲ قطع می‌کند ، آن را رسم می‌کنیم :



مثال ۴ـ $y=\frac{4(x+1)}{(x-1)^2}$

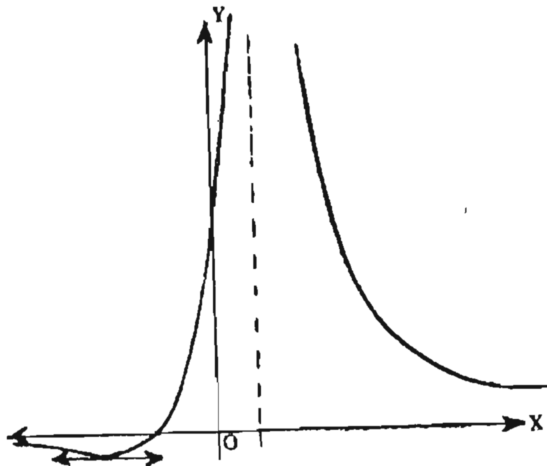
۱ ـ این تابع به‌ازای $x=1$ منفصل است .

۲ ـ علامت مشتق آن ، $y'=\frac{-4(x+3)}{(x-1)^3}$ ، موافق علامت حاصل ضرب $(-x-3)(x-1)$ است . (مشتق به ازای $x=-3$ ، صفر و به ازای $x=1$ ، بینهایت می‌باشد .)

۳ـ و ۴ـ با رعایت جهت تغییرات (یا مستقیماً) می‌بینیم که مقدار تابع به ازای $x=1$ فقط $+\infty$ می‌باشد . تغییرات تابع چنین است :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		−	0	+	∞	−	
y	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

۵ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع را ، با توجه به اینکه دارای دو خط مجانب است به معادلات : $y=0$ و $x=1$ و محور طولها را در نقطهٔ $x=-1$ ومحور yها رادر نقطهٔ $y=4$ قطع‌می‌کند، رسم‌می‌کنیم:



مثال ۳ـ $y=\frac{x^2+3x+1}{x^2+x}$

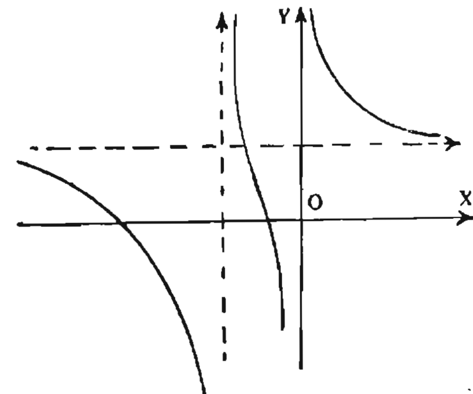
۱ ـ این تابع به ازای دو مقدار $x=0$ و $x=-1$ منفصل و به ازای مقادیر دیگر x متصل است .

۲ ـ مشتق ، $y'=\frac{-2x^2-2x-1}{(x^2+x)^2}$ ،ریشه ندارد وعلامت آن به‌ازای همهٔ مقادیر x موافق علامت‌ضریب جملهٔ درجهٔ‌دوم صورت، یعنی منفی است .

۳ـ و ۴ـ جدول تغییرات تابع چنین است :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		−		−		−	
y	۱	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	۱

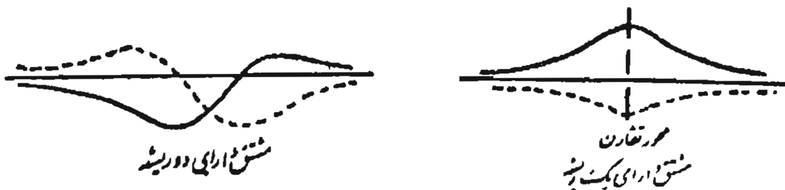
۵ ـ قبل از رسم منحنی نمایش تغییرات این تابع ، سه خط مجانب آن ، خطوط $x=0$ و $x=-1$ و $y=1$ را رسم می‌کنیم ؛



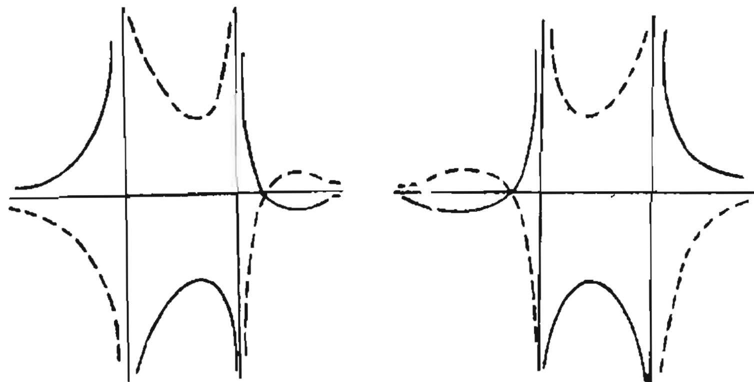
و بعد با توجه به اینکه این منحنی محور x ها را در دو نقطه ، به طولهای : $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \# -2{,}6$ و $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \# -0{,}4$ قطع می‌کند ، آن را رسم می‌کنیم .

توجه کنید ! منحنی نمایش تغییرات تابعهای کسری‌که مخرج آنها از درجهٔ دوم باشد و درجهٔ صورت آنها از ۲ بیشتر نباشد ، همواره دارای یك مجانب موازی محور طولهاست و صرف نظر از وضع محورهای مختصات ، اما به فرض آنکه محور x ها موازی امتداد سطرهای‌کتاب و محور y ها بر آن عمود باشد ، شبیه به یکی از این شکلها خواهد بود .

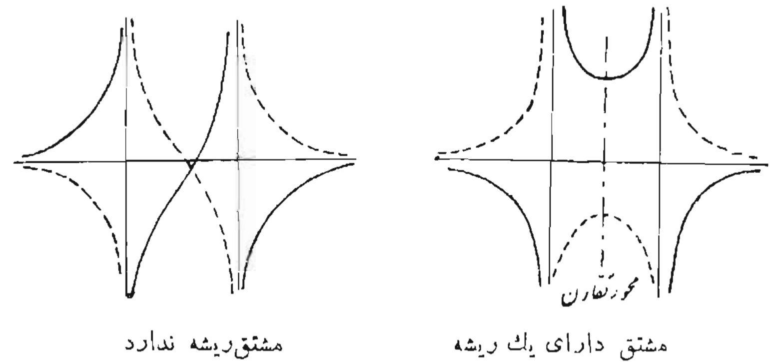
اگر مخرج ریشه نداشته باشد :



اگر مخرج دارای دو ریشهٔ متمایز باشد :

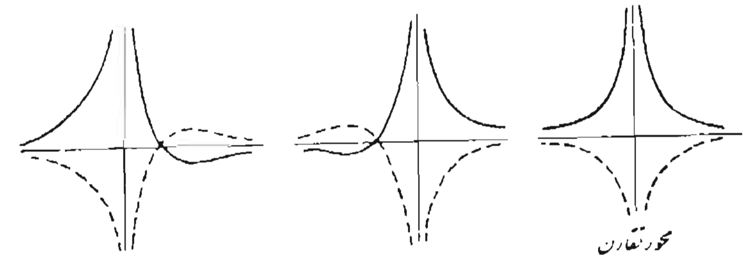


مشتق دارای دو ریشه



مشتق دارای یك ریشه — مشتق ریشه ندارد

اگر مخرج دارای یك ریشهٔ مضاعف باشد :



ج ـ رسم منحنی نمایش تغییرات توابعی‌که به صورت زیرند :

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{b'x+c'} \qquad (a \text{ و } b'\neq 0)$$

باید توجه داشت‌که چون درجهٔ صورت این توابع یك واحد از درجهٔ مخرج آنها بیشتر است ، منحنی نمایش تغییرات آنها دارای مجانب مایل نیز می‌باشد (شمارهٔ ۴۷ ج) .

مثال ۱ـ $y=\frac{x^2+1}{x}$.

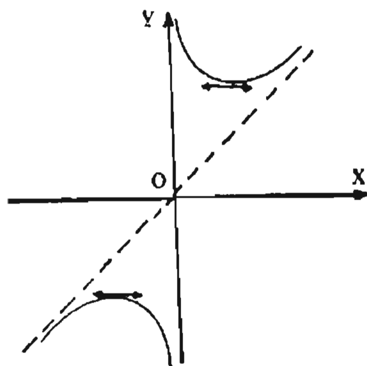
۱ـ این تابع به‌ازای همهٔ مقادیر x بجز $x=0$ متصل است .

۲ـ مشتق این تابع ، $y'=\frac{x^2-1}{x^2}$ ، به‌ازای دومقدار $x=\pm 1$ صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد . در فاصلهٔ $(+1 \text{ و } -1)$ منفی و در فواصل دیگر مثبت است .

۳ـ و ۴ـ جدول تغییرات تابع از این قرار است: (اگر صورت y را به مخرجش تقسیم کنیم ، می‌توان آن را به شکل $y=x+\frac{1}{x}$ نوشت ، از این رو اندازهٔ y به ازای $x=\pm\infty$ واضح است) .

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

معادلهٔ مجانب مایل این منحنی که از تقسیم صورت بر مخرج آن بدست می‌آید، $y=x$ و معادلهٔ مجانب موازی با محور y های آن $x=0$ است . با در نظرگرفتن این دومجانب، منحنی را چنین رسم می‌کنیم :



چنانکه می‌بینید در این مثال مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است .

بطورکلی باید دانست‌که محل تلاقی دو مجانب منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{b'x+c'}$ مرکز تقارن منحنی است .

مثال ۲- $y=\frac{x^2-3x+2}{2x-3}$.

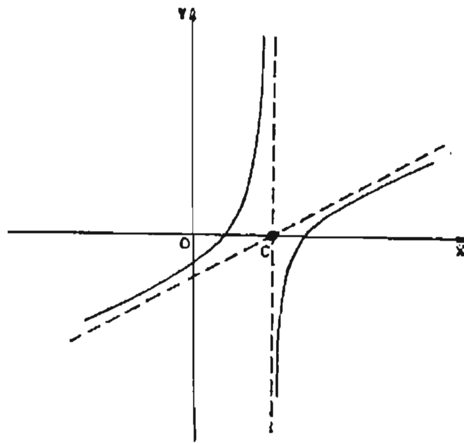
۱ - این تابع تنها به ازای $x=\frac{3}{2}$ منفصل می‌شود و به ازای سایر مقادیر x اتصالی است .

۲- مشتق آن، $y'=\frac{2x^2-6x+5}{(2x-3)^2}$ ، ریشه ندارد. بنابراین علامت آن به ازای همهٔ مقادیر x موافق علامت صورت کسر است، یعنی مثبت است ، زیراکه ضریب جملهٔ درجهٔ دوم در صورت ، مثبت است.

۳- و ۴- و ۵- تابع پس از تقسیم صورت بر مخرج بدین شکل نوشته می‌شود : $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}-\frac{\frac{1}{4}}{2x-3}$. از اینجا اولاً اندازهٔ y به ازای $x=\pm\infty$ بدست می‌آید وجدول زیر نتیجه می‌شود :

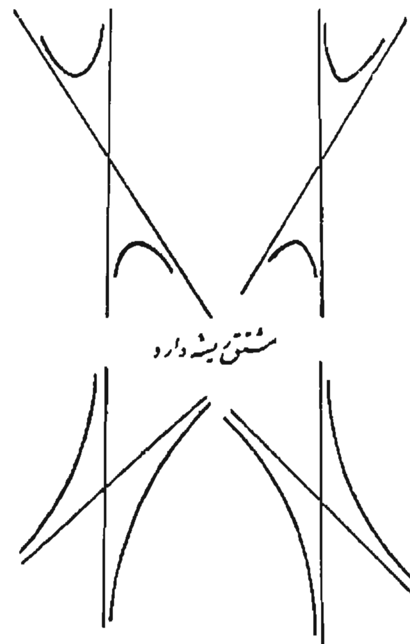
x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$ ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

ثانیاً دیده می‌شود که خط $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ ، مجانب مایل منحنی است . محل تلاقی دومجانب این‌منحنی، یعنی $C\left|\begin{matrix}\frac{3}{2}\\0\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن‌منحنی است (چرا؟) .



نقطهٔ تلاقی منحنی با محور y ها به عرض $-\frac{2}{3}$ و نقاط تلاقی با محور x ها به طولهای ۱ و ۲ می‌باشند .

توجه‌کنید! منحنی نمایش تغییرات تابعهای‌کسری که مخرج آنها از درجهٔ اول وصورتشان ازدرجهٔ دوم باشد، همواره یك مجانب موازی محور y ها ویك مجانب مایل دارد و محل تلاقی دومجانب، مرکزتقارن منحنی است.



منحنی نمایش تغییرات تابع هذلولی ، صرف نظر از

وضع محورهای مختصات به یکی ازچهار شکل پایین صفحهٔ ۱۰۱ است.

چند نکته : توجه به‌نکات زیر، برای رسم صحیح منحنی نمایش تابعهای کسری درجهٔ دوم (یعنی آنکه درجهٔ صورت و مخرجش از ۲ تجاوز نکند و اقلاً یکی از آنها از درجهٔ دوم باشد) بسیارمفید است:

۱ ـ مشتق تابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ (۱)

یعنی: $y'=\frac{(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+bc'-cb'}{(a'x^2+b'x+c')^2}$

کسری است که درجهٔ صورت آن هیچوقت بیش از ۲ نیست و نمی‌تواند بیش از دو دفعه تغییر علامت دهد . بنابراین تابع مزبور بیش از یك ماکزیمم و یك مینیمم نمی‌تواند داشته باشد .

۲ ـ فرض‌کنیم‌که x_0 ریشه‌ای از مشتق تابع‌کسری $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ باشدکه به ازای‌آن مشتق تغییرعلامت می‌دهد، پس مقدار تابع به ازای $x=x_0$ ماکزیمم یا مینیمم خواهد بود. برای بدست‌آوردن این مقدار ، طبیعی است که باید در عبارت تابع ، به جای x بگذاریم x_0 ، یعنی $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ را حساب‌کنیم . اما به موجب قضیهٔ زیر می‌توان این محاسبه را در حالت‌کلی ساده‌تر کرد :

قضیه ـ اگر x_0 یکی از ریشه‌های مشتق کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد ، به شرط اینکه $g'(x_0)$ و $g(x_0)$ صفر نباشند ، داریم :

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

زیرا بنا به فرض ، چون x_0 ریشهٔ مشتق است ، داریم :

$$f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)=0$$

حال به فرض $g(x_0)\neq 0$ و $g'(x_0)\neq 0$ ، اگرطرفین این تساوی را برحاصل ضرب $g'(x_0)\,.\,g(x_0)$ تقسیم کنیم ، همان تساویی که می‌خواهیم ثابت‌کنیم بدست می‌آید .

این قضیه (که اختصاصی به‌کسرهای درجهٔ دوم ندارد) مخصوصاً در مواردی‌که x_0 به شکل یك عدد مرکب $A\pm\sqrt{B}$ باشد محاسبهٔ ماکزیمم و مینیمم را ساده می‌کند .

مثال ـ چنانکه دیدیم (شمارهٔ ۵۱ ، ب . حالت دوم ، مثال ۱) **مشتق** تابع $y=\frac{x-2}{x^2-1}$ به ازای $2\pm\sqrt{3}$ صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد . برای محاسبهٔ مقدار y ، نظیر یکی از این دو مقدار ، به‌جای آنکه این مقدار را در خود تابع ببریم در $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{2x}$ می‌بریم .

مثلاً به ازای $x_0=2-\sqrt{3}$ داریم :

$$y_0=\frac{1}{2(2-\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{2(4-3)}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و برای بدست آوردن مقدار y به ازای $2+\sqrt{3}$ ، محاسبهٔ جداگانه لازم نیست . از آنجا که ضرایب y همه اعداد صحیحند و اختلاف دو مقدار x فقط در علامت $\sqrt{3}$ است ،کافی است که در محاسبهٔ مربوط به x_0 ، همه‌جا $\sqrt{3}$ را به $-\sqrt{3}$ تبدیل‌کنیم. می‌بینیم‌که اندازهٔ y به‌ازای $2+\sqrt{3}$ مزدوج اندازهٔ y به‌ازای $2-\sqrt{3}$ ، یعنی $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است .

۳ـ اگر منحنی نمایش تغییرات تابع (۱) را با خط D ، موازی محور xها، به‌معادلهٔ $y=m$ قطع‌کنیم ، x های نقاط برخورد ، ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دومند :

$$(۲)\quad (a'm-a)x^2+(b'm-b)x+c'm-c=0$$

پس : اولاً هرخط D موازی محور x ها منحنی نمایش تابع کسری درجهٔ دوم را منتهی دردو نقطه ، در فاصلهٔ نزدیك تلاقی می‌کند.

ثانیاً اگر m به سمت $\frac{a}{a'}$ میل‌کند ، ضریب x^2 از معادلهٔ (۲) صفر می‌شود وچنانکه در فصل چهارم خواهیم دید اقلاً یکی از دوریشهٔ این معادلهٔ درجهٔ دوم ازحیث قدر مطلق بی‌اندازه بزرگ می‌شود ، یعنی خط $y=\frac{a}{a'}$ (مجانب موازی محور xها) با منحنی ، منتهی یك نقطهٔ تلاقی درفاصلهٔ نزدیك دارد .

ثالثاً اگر m چنان باشدکه معادلهٔ (۲) ریشهٔ مضاعف داشته باشد، یعنی m در معادلهٔ زیر صدق‌کند :

$$(۳)\quad (b'm-b)^2-4(a'm-a)(c'm-c)=0$$

خط D برمنحنی مماس خواهد بود و چون D موازی محور xها است ، نتیجه می‌گیریم که mهای ریشه‌های معادلهٔ (۳) ، برابر ماکزیمم و مینیمم y می‌باشند .

ازاینجا طریقهٔ محاسبهٔ ماکزیمم ومینیمم y (بدون استعمال مشتق) بدست می‌آید وآن این است‌که معادلهٔ (۳) را تشکیل دهیم وریشه‌های آن را حساب‌کنیم .

برای آنکه ببینیم کدامیك از دو ریشه‌ای که بدست آمده است

ماکزیمم و کدام مینیمم است ، کافی است‌که در نظر داشته باشیم‌که چنانچه تابع همواره متصل باشد، مقدارماکزیمم بزرگتر ازمقدارمینیمم است وچنانچه مخرج تابع ریشه داشته باشد ، مقدار مینیمم بزرگتر از مقدار ماکزیمم است .

۴ ـ در حالی‌که مخرج از درجهٔ دوم باشد و محور تقارن موازی محور y ها وجود نداشته باشد ، منحنی به مجانب خود Δ به معادلهٔ $y=\frac{a}{a'}$ در یك نقطهٔ A برمی‌خورد . اگر محورها را به موازات خود انتقال دهیم تا A مبدأ جدید مختصات شود (یعنی محور xها بر مجانب Δ منطبق شود) ، معادلهٔ منحنی در دستگاه جدید به صورت $y=\frac{x}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ و معادلهٔ (۲) که ریشه‌های آن x های نقاط تلاقی منحنی با خط $y=m$ است ، به شکل زیر می‌شود :

$$(۴)\quad \alpha m x^2+(\beta m-1)x+\gamma m=0$$

حاصل ضرب دوریشهٔ این معادله بستگی به m ندارد . به عبارت دیگر اگر M_1 و M_2 نقطه‌های تلاقی منحنی با خط D ، موازی Δ ، و m_1 و m_2 تصاویر آن نقاط روی Δ باشند، حاصل ضرب $\overline{Am_1}\cdot\overline{Am_2}$ بستگی به جای D ندارد ، یعنی :

$$\overline{Am_1}\cdot\overline{Am_2}=\frac{\gamma}{\alpha}=\text{مقدارثابت}$$

بخصوص اگر P و Q نقاط نظیر ماکزیمم و مینیمم و p و q تصاویر آنها باشند، چنانچه D را منطبق برمماس در P یا در Q اختیار کنیم ، داریم :

$$Ap^2=Aq^2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

بنابراین چون P و Q روی یك خط موازی محور y ها نیستند $\overline{Ap}=-\overline{Aq}$ ، یعنی A وسط قطعه خط pq است . پس بطورکلی (محورها هرجا باشند) ، طول یا x نقطهٔ تلاقی منحنی با مجانب Δ ، واسطهٔ عددی ریشه‌های مشتق تابع است (البته تابع کسری درجهٔ دوم که مخرجش ازدرجهٔ دوم باشد) .

از تساوی $\overline{Am_1}\cdot\overline{Am_2}=\overline{Ap}^2=\overline{Aq}^2$ نتیجه می‌گیریم که m_1 و m_2 مزدوج توافقی p و q می‌باشند .

د ـ رسم منحنی نمایش تغییرات توابع کسری که دارای صورت یا مخرجی از درجهٔ ۲ بیشتر باشند .

مثال‌ـ $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.

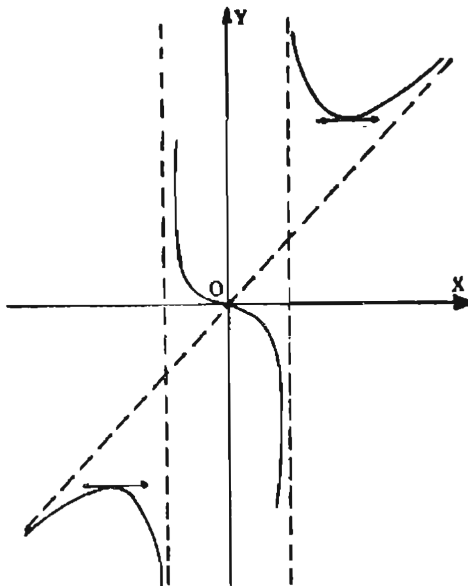
۱ـ ریشه‌های مخرج عبارتند از $x=\pm 2$. بنابراین تابع ، به ازای این دومقدار، منفصل و به‌ازای جمیع مقادیر دیگرمتصل است.

۲ـ مشتق تابع ، $y'=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$ ، به ازای $x=0$ و $x=\pm 2\sqrt{3}$ صفر می‌شود و علامت آن به ازای $x<-2\sqrt{3}$ یا $x>2\sqrt{3}$ مثبت و بین این دو مقدار منفی است (در ازای $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد) .

۳ـ و۴ ـ ازآنجاکه خارج قسمت صورت برمخرج برابر x است، مقادیر y در ازای $x=\pm\infty$ برابر $\pm\infty$ می‌باشد و جدول تغییرات چنین است :

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-3\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

۵ـ منحنی تغییرات تابع را با توجه به اینکه دارای سه خط مجانب $x=-2$ و $x=2$ و $y=x$ است ، چنین رسم می‌کنیم :



توجه‌کنید ! منحنی نمایش تغییرات تابع اخیر نسبت به مبدأ مختصات قرینه است . بنابراین‌کافی است‌که جدول تغییرات تابع و منحنی نمایش آن را به ازای x های مثبت رسم‌کنیم و از روی آن تمام تغییرات و منحنی را بدست آوریم .

III ـ توابع گنگ

۵۲ـ رسم منحنی نمایش تغییرات توابع گنگ ـ هرگاه عبارت تابع برحسب متغیر ، اصم باشد ، ممکن استکه تابع به ازای جمیع مقادیر واقع درفاصله‌ای ، یا در فواصلی ، مقدار حقیقی نداشته باشد ، بنابراین باید قبلاً معین کرد که تابع در چه فاصله‌هایی مقدار حقیقی دارد وسپس با تعیین تغییرات تابع درآن فاصله‌ها منحنی نمایش آن را رسم‌کرد . چند مثال زیر مطلب را روشن می‌کند :

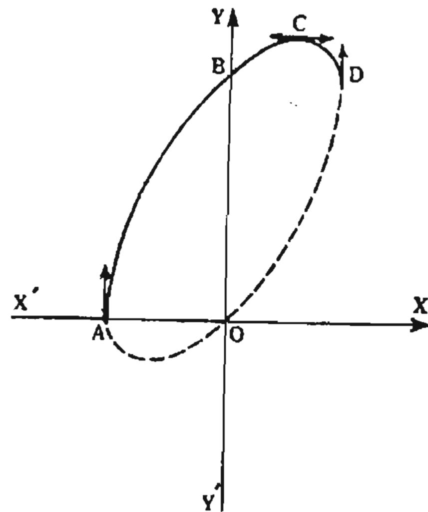
مثال ۱ـ $y=x+2+\sqrt{4-x^2}$.

۱ـ این تابع تنها در فاصلهٔ (۲ و ۲−) حقیقی است . بنابراین تغییرات آن را باید در فاصلهٔ $-2<x<2$ معین کرد .

۲ـ مشتق تابع ، $y'=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$ ، به ازای ریشهٔ خود یعنی $\sqrt{2}$ تغییر علامت می‌دهد .

۳ـ و ۴ـ جدول تغییرات تابع چنین است :

X	-2		$\sqrt{2}$		2
Y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
Y	0	↗	$2+2\sqrt{2}$	↘	4



۵ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع با توجه به اینکه مجانب ندارد (چون x و y هیچکدام بینهایت نمی‌شوند) قـوس ABCD است . مماس در نقطه‌های A و D موازی محور y هاست .

توجه کنید ! به همین ترتیب دیده می‌شودکه منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x+2-\sqrt{4-x^2}$ به صورت قوس AOD است (قوس نقطه چین در شکل همین صفحه) . دوکمان AOD و ABCD بر روی هم تشکیل یك بیضی می‌دهندکه معادلهٔ آن چنین است :

$y=x+2\pm\sqrt{4-x^2}$ یا $(y-x-2)^2=4-x^2$

یا $y^2-2y(x+2)+2x^2+4x=0$

مثال ۲ـ $y=x+2+\sqrt{x^2-4}$.

۱ـ این تابع در فاصله‌های $(-\infty, -2)$ و $(+2, +\infty)$ حقیقی و محاسبه پذیر است . در داخل فاصلهٔ $(-2, +2)$ ، اندازه‌اش موهوم است .

۲ـ مشتق تابع ، $y'=\dfrac{\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}}$ ، ریشه ندارد. بنابراین

علامت‌آن درهریك از دوفاصله ثابت می‌ماند . در فاصلهٔ $(-\infty, -2)$ علامت مشتق منفی و در فاصلهٔ $(2, +\infty)$ علامت مشتق مثبت است .

۳ـ به‌ازای $x=+\infty$ مقدار y نیز $+\infty$ می‌شود ، ولی به‌ازای $x=-\infty$ ، تابع به‌صورت مبهم $+\infty-\infty$ در می‌آیدکه برای رفع ابهام ، چنین می‌نویسیم :

$$y=x+2+\sqrt{x^2-4}=\frac{(x+2)^2-(x^2-4)}{x+2-\sqrt{x^2-4}}=\frac{4x+8}{x+2-\sqrt{x^2-4}}$$

یا چون x منفی است :

$$y=\frac{4+\frac{8}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$

می‌بینیم‌که اندازهٔ حقیقی y به ازای $x=-\infty$ برابر $\frac{4}{1+1}$ یا ۲ است .

۴ـ جدول تغییرات تابع چنین است :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	∞		∞	$+$	
y	2	↘	0		4	↗	$+\infty$

۵ـ از جدول پیداست‌که منحنی نمایش تغییرات تابع دارای دو شاخه است . شاخهٔ اول دارای نقطهٔ بینهایت دوری است‌که x آن $-\infty$ و y آن ۲ است ، پس دارای مجانب $y=2$ می‌باشد . شاخهٔ دوم دارای نقطهٔ بی‌اندازه دوری است‌که x و y آن هر دو بینهایتند، پس ممکن

است دارای مجانب مایل باشد . برای بدست‌آوردن معادلهٔ این مجانب، ابتدا حد $\frac{y}{x}$ را به ازای $x=+\infty$ پیدا می‌کنیم، داریم :

$$\frac{y}{x}=1+\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}$$

می‌بینیم که حد $\frac{y}{x}$ به‌ازای $x=+\infty$ ، برابر ۲ است؛ بنابراین شاخهٔ دوم دارای امتداد مجانبی است‌که ضریب زاویه‌ای آن ۲ است .

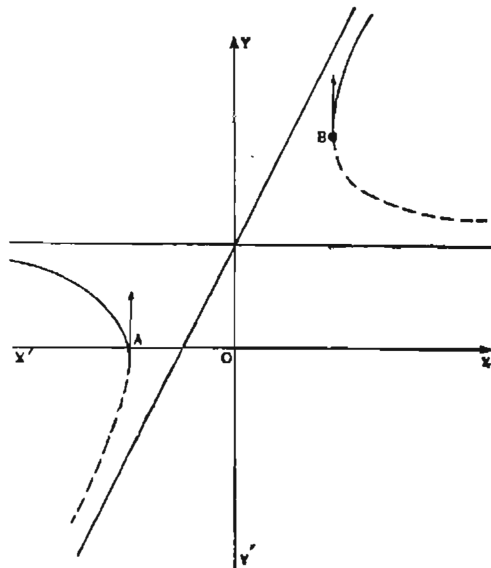
وبعد حد $y-2x$ را چنین بدست می‌آوریم :

$$y-2x=-x+2+\sqrt{x^2-4}$$

می‌بینیم‌که هنگامی که x بی‌اندازه بزرگ می‌شود ، طرف دوم به صورت $+\infty-\infty$ درمی‌آیدکه پس از رفع ابهام نتیجه می‌شود :

$$\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=2$$

پس شاخهٔ دوم دارای مجانب مایلی است به معادلهٔ $y=2x+2$ ومنحنی نمایش تغییرات چنین است :



مماس منحنی در نقاط A و B که طول آنها -2 و $+2$ است بموازات محور y هاست .

توجه کنید! به همین ترتیب دیده می‌شود که منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x+2-\sqrt{x^2-4}$ از دو شاخهٔ نقطه چین درشکل صفحهٔ قبل ، تشکیل شده است . شاخه‌های منحنی نمایش تغییرات این دو تابع روی هم تشکیل یك هذلولی می‌دهندکه معادلهٔ آن چنین است:

$$y=x+2\pm\sqrt{x^2-4}$$

یا :

$$y^2-2y(x+2)+4x+8=0$$

مثال ۳ـ $y=\sqrt{\frac{1}{x-3}}$.

۱ـ این تابع در داخل فاصلهٔ (۳ و ∞+) حقیقی و محاسبه پذیر است .

۲ـ مشتق تابع، $y'=\frac{-1}{2\sqrt{(x-3)^3}}$ ، چون باید $x-3$ مثبت باشد ، همیشه منفی است .

۳ـ و ۴ـ جدول تغییرات تابع چنین است :

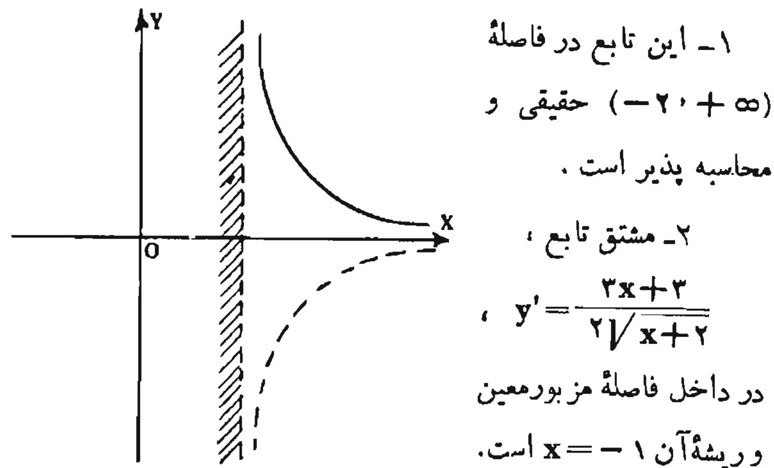
x	3		$+\infty$
y'		−	
y	$+\infty$	↘	0

۵ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع با توجه به اینکه مجانب مایل ندارد ، شاخه‌ای است که بالای محور x ها رسم شده است .

توجه کنید! به همین ترتیب دیده می‌شود که منحنی نمایش تغییرات تابع $y=-\sqrt{\frac{1}{x-3}}$ ، شاخه‌ای است که درشکل خط چین

کشیده شده است . این دو شاخه بر روی هم ، یك منحنی به معادلهٔ $y=\pm\sqrt{\frac{1}{x-3}}$ یا $y^2=\frac{1}{x-3}$ را تشکیل می‌دهند .

مثال ۴ـ $y=(x-1)\sqrt{x+2}$.



۱ـ این تابع در فاصلهٔ $(-2, +\infty)$ حقیقی و محاسبه پذیر است .

۲ـ مشتق تابع ، $y'=\frac{3x+3}{2\sqrt{x+2}}$ ، در داخل فاصلهٔ مزبورمعین و ریشهٔ آن $x=-1$ است.

علامت مشتق به ازای $x<-1$ منفی وبه ازای $x>-1$ مثبت است.

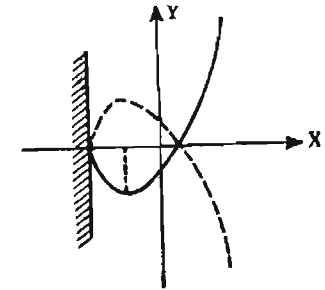
۳ـ و ۴ـ جدول تغییرات تابع چنین است :

x	−2		−1		$+\infty$
y'	∞	−	0	+	
y	0	↘	−2	↗	$+\infty$
			مینیمم		

چون شاخهٔ منحنی دارای نقطهٔ بینهایت دور است ، قبل از رسم منحنی باید تحقیق کرد که مجانب مایل دارد یا نه . اما وقتی‌که x

بینهایت می‌شود $\frac{y}{x}$ نیز بی‌اندازه بزرگ می‌شود، یعنی امتداد مجانب همان امتداد محور y هاست . و چون بر طبق آنچه قبلا دیده‌ایم عمل کنیم ، معلوم می‌شود که خط Δ' وضع حدی ندارد ، پس منحنی، مجانب مایل ندارد و در امتداد محور y ها شاخهٔ پارابلی دارد .

منحنی نمایش تغییرات تابع چنین است :



منحنی به محور x ها در نقطه‌های به طول ۱ و ۲− بر می‌خورد و محل برخوردن آن با محور yها نقطهٔ به‌عرض $-\sqrt{2}$ است .

مماس بر منحنی در نقطهٔ به طول ۲− موازی محور yهاست .

توجه کنید ! به همین ترتیب دیده می‌شود که منحنی نمایش تغییرات $y=-(x-1)\sqrt{x+2}$ شاخه‌ای است که در شکل نقطه چین کشیده شده است . این دو شاخه بر روی هم ، یك منحنی به معادلهٔ $y=\pm(x-1)\sqrt{x+2}$ یا $y^2=(x-1)^2(x+2)$ را تشکیل می‌دهند .

مثال ۵- $y=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$.

۱- این تابع به‌ازای جمیع مقادیر x حقیقی ومعین و متصل‌است.

۲- مشتق ، $y'=\frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}$ ، به ازای تمام مقادیر ، جزصفر و۱ معین است وعلامت آن با علامت صورت ، یعنی$3x^2-2x$،

یکی است و به ازای ریشه‌های صورت ، یعنی صفر و $\frac{2}{3}$ ، تغییر علامت می‌دهد :

به‌ازای $\frac{2}{3}$ صفر می‌شود و به ازای $x=0$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آیدکه مقدار حقیقی آن ∞ است .

۳- و ۴- جدول تغییرات تابع چنین است :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↗	0	↗	$+\infty$
			ماکزیمم		مینیمم				

۵- از روی جدول می‌بینیم که منحنی نمایش تغییرات تابع از نقطهٔ O می‌گذرد . تابع در این نقطه ماکزیمم است ، اما مماس بر منحنی در این نقطه موازی با محور y ها (یعنی خود این محور) است (نقطهٔ O نقطهٔ **بازگشت** نامیده می‌شود) . در نقطهٔ به طول ۱ نیز، مماس برمنحنی موازی محور yهاست و چون با ترقی کردن x ، y نیز ترقی می‌کند، این نقطه، نقطهٔ عطف است . چون وقتی‌که $|x|$ بی‌اندازه بزرگ شود $|y|$ نیز بی‌اندازه بزرگ می‌شود ، ممکن است‌که منحنی مجانب مایل داشته باشد . برای پیداکردن معادلهٔ این مجانب ، بترتیب چنین عمل می‌کنیم :

اول : $\frac{y}{x}=\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}$

پس: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=1$

دوم: $y-x=\sqrt[3]{x^3-x^2}-x=\sqrt[3]{x^3-x^2}-\sqrt[3]{x^3}$

که با استفاده از اتحاد:

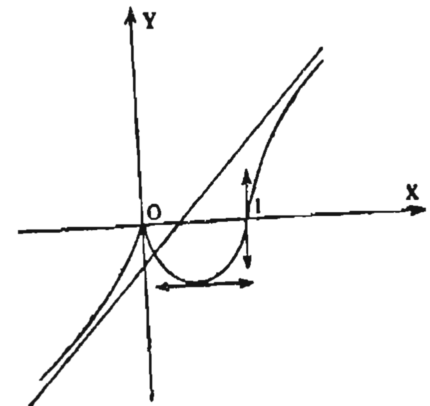
$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

چنین نتیجه می‌گیریم:

$$y-x=\frac{x^3-x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}+\sqrt[3]{x^3(x^3-x^2)}+\sqrt[3]{x^6}}$$

و از آنجا: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-x)=-\frac{1}{3}$

پس منحنی یک مجانب مایل به معادلهٔ $y=x-\frac{1}{3}$ دارد وشکل مجاور، منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض است.



تمرین

تغییرات تابعهای زیر را معین‌کرده منحنی نمایش تغییرات آنها را رسم کنید:

۱- $y=4x^2+4x-3$

۲- $y=(x+2)(x-1)(x-3)$

۳- $y=(x-3)(2x+1)^2$

۴- $y=(x+3)(2x-1)^2$

۵- $y=x^3-x^2-4x+1$

۶- $y=2x^3+3x^2-14x$

۷- $y=x^4-5x^2+4$

۸- $y=-x^4+2x^2$

۹- $y=x^2(x-1)$

۱۰- $y=(x-2)^2(x+1)$

۱۱- $y=2x^3(x^2-1)^2$

۱۲- $y=x^2(x^2+1)^2$

۱۳- $y=-(x^2-1)^2(x^2-4)$

۱۴- $y=x(x^2-1)$

۱۵- $y=x^3-x^2+4x$

۱۶- $y=x^4+x^2+1$

۱۷- $y=\frac{2x+1}{3x-1}$

۱۸- $y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-8x+12}$

۱۹- $y=\frac{x^2-9x+12}{x^2-3x+2}$

۲۰- $y=\frac{3x^2+2x-3}{3x^2-10x+7}$

۲۱- $y=\frac{x^2+4x}{x^2+4x+4}$

۲۲- $y=\frac{3x^2-3}{2x^2-8}$

۲۳- $y=\frac{2x-3}{x^2+x-2}$

۲۴- $y=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}$

۲۵- $y=\frac{2x^2+4x-5}{x+1}$

۲۶- $y=\frac{x^2-3x+2}{4-x}$

۲۷- $y=x+\frac{1}{x^2}$

۲۸- $y=\frac{x^3}{x^2-1}$

۲۹- $y=\frac{(1+x)^3}{(x-1)^2}$

۳۰- $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x+2}$

۳۱- $y=\frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

۳۲- $y=\frac{x^4+x^2-1}{x^4+4x^2+1}$

۳۳- $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

۳۴- $y=\frac{x^2}{x^2-x+1}$

۳۵- $y=\frac{x+2}{x^2+4}$

۳۶- $y=\frac{x^2+x}{x^2-2x+4}$

۳۷- $y=\sqrt{x-1}$

۳۸- $y=\sqrt{x(x-1)}$

-۳۹ $y=\sqrt{1-x^2}$ -۴۰ $y=1\pm\sqrt{x^2-4x}$

-۴۱ $y=x-\sqrt{x}$ -۴۲ $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$

-۴۳ $y=2x+\sqrt{-x^2+4x+5}$

-۴۴ $y=-x+\sqrt{x^2+2x+5}$

-۴۵ $y=1+x+\sqrt{x^2+x+1}$

-۴۶ $y=1-\sqrt{x-x^2}$

-۴۷ $y=(1-x)\sqrt{1+x}$

-۴۸ $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ -۴۹ $y=x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

-۵۰ $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ -۵۱ $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

-۵۲ $y^2=(x-2)(x^2-9)$

-۵۳ $y^2=x^2(x-5)^2(2x-3)$

-۵۴ $(y-x)^2=16-x^2$ -۵۵ $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$

-۵۶ $y=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ -۵۷ $y=\sqrt[3]{x^2-1}$

-۵۸ $y=\sqrt[3]{x^3-4x+3}$

۵۹ـ اولاجدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{1}{x^2+x-2}$ را رسم کنید . ثانیاً معادلهٔ مماس براین منحنی را در نقطهٔ به طول ۲ بدست آورید . ثالثاً مختصات نقطهٔ برخورد این مماس را (غیراز نقطهٔ تماس) با منحنی حساب کنید . رابعاً از نقطهٔ $A(1,0)$ مماسی بر منحنی نمایش تغییرات تابع‌کشیده معادلهٔ مماس را پیداکنید .

۶۰ـ اولاً مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x(x^2-2)}{(x^2+1)^2}$. ثانیاً معادلهٔ مماس براین منحنی را در نقاط برخوردآن

با محور xها بنویسید . ثالثاً زاویهٔ بین دو مماس بر منحنی در نقاطی واقع برمنحنی وبه طولهای ±۱ را حساب‌کنید .

۶۱ـ اولاً در تابع $y=1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}$ مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع بهازای $x=\frac{8}{3}$ دارای ماکزیممی برابر $\frac{25}{16}$ شود. ثانیاً جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}$ را رسم‌کنید .

۶۲ـ تابع $y=\frac{x^2+2ax+b}{x^2+1}$ مفروض است . اولاً a و b را بقسمی تعیین‌کنیدکه بهازای $x=2$ مقدار تابع برابرصفر وبهازای $x=1$ مقدار تابع برابر ۲ شود . ثانیاً جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع را به ازای این مقادیر a و b رسم‌کنید. ثالثاً مختصات نقاطی را بدست آوریدکه مماس برمنحنی در آن نقاط با محور xها موازی باشد .

۶۳ـ درتابع $y=x^2+\frac{1}{x}+ax+b$ ، دوعدد a و b را چنان بگیرید که ماکزیمم تابع در ازای $x=-\frac{1}{2}$ برابرصفرباشد. سپس جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع را به ازای این مقادیر a و b رسم‌کنید .

۶۴ـ تغییرات تابع $y=\frac{x^2+3x}{x^2+x+3}$ را معین‌کرده منحنی (c) نمایش‌آن را بکشید. روی این منحنی سه نقطه یافت می‌شودکه درآنجا مشتق دوم y صفر است (سه نقطهٔ عطف) . اگر A یکی از این سه نقطه باشد ، نقطه‌های برخورد منحنی (c) را با مماس در A پیداکنید .

۶۵ـ عدد α را چنان بگیرید که تفاضل میان ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\frac{-x^2+3x+\alpha}{x-4}$ برابر ۸ باشد . سپس تغییرات y را معین ومنحنی نمایش آن را رسم‌کنید .

۶۶ـ اولاً ثابت‌کنید که وقتی‌که سه جمله‌ای ax^2+bx+c ریشه

دارد ، تابع $y=\frac{۲ax+b}{ax^۲+bx+c}$ همواره در یك جهت تغییر می‌کند .

ثانیاً b و c را برحسب a بقسمی تعیین‌کنیدکه منحنی نمایش تغییرات تابع، محور xها را در نقطهٔ به طول ۱/۵- و محور yها را در نقطهٔ به عرض ۱/۵ قطع‌کند. ودراین صورت a رانیزچنان بیابیدکه منحنی ازنقطهٔ $(۱ \text{ و } \frac{۵}{۶})$ بگذرد . ثالثاً تغییرات تابع $y=\frac{۲x+۳}{x^۲+۳x+۲}$ را تعیین کرده منحنی آن را رسم‌کنید .

فصل پنجم

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم پارامتری و مقایسهٔ یك یا دو عدد با ریشه‌ها

I- بحث در وجود و علامت ریشه‌ها

۱- یادآوری - اولاً - شرط لازم و کافی برای اینکه معادلهٔ درجهٔ دومی دارای دو ریشهٔ مختلف العلامه باشد ، این است که داشته باشیم : $\frac{c}{a}<۰$. در این‌صورت ، با فرض $x'<x''$ ، خواهیم داشت :

$$x'<۰<x''$$

ثانیاً - شرط لازم وکافی برای آنکه معادلهٔ درجهٔ دوم دو ریشهٔ مثبت داشته باشد ، این است‌که داشته باشیم : $\Delta>۰$ و $\frac{c}{a}>۰$ و $-\frac{b}{a}>۰$.

در این صورت خواهیم داشت :

$$۰<x'<x''$$

ثالثاً- شرط لازم و کافی‌آنکه دو ریشه ، هر دو منفی باشند، این است‌که‌داشته باشیم، $\Delta>۰$ و $\frac{c}{a}>۰$ و $-\frac{b}{a}<۰$. دراین‌صورت داریم:

$$x'<x''<۰$$

۲- بحث - مقصود از بحث در وجود و علامت ریشه‌های یك معادلهٔ پارامتری درجهٔ دوم، این است‌که ابتدا ببینیم به‌ازای چه مقادیر پارامتر ، معادله ریشه دارد و بعد به ازای این مقادیر ، علامت ریشه‌ها را تعیین‌کنیم .

دارد ، تابع $y=\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$ همواره در یك جهت تغییر می‌کند .

ثانیاً b و c را برحسب a بقسمی تعیین‌کنیدکه منحنی نمایش تغییرات تابع، محور xها را در نقطهٔ به طول ۱/۵− و محور yها را در نقطهٔ به عرض ۱/۵ قطع‌کند. ودراین صورت a رانیزچنان بیابیدکه منحنی ازنقطهٔ ($\frac{5}{6}$ و ۱) بگذرد . ثالثاً تغییرات تابع $y=\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ را تعیین کرده منحنی آن را رسم‌کنید .

فصل پنجم

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم پارامتری و مقایسهٔ یك یا دو عدد با ریشه‌ها

I− بحث دروجود وعلامت ریشه‌ها

۱− یادآوری − اولاً − شرط لازم و کافی برای اینکه معادلهٔ درجهٔ دومی دارای دو ریشهٔ مختلف العلامه باشد ، این است که داشته باشیم : $\frac{c}{a}<0$. در این‌صورت ، با فرض $x'<x''$ ، خواهیم داشت :

$$x'<0<x''$$

ثانیاً − شرط لازم وکافی برای آنکه معادلهٔ درجهٔ دوم دو ریشهٔ مثبت داشته باشد ، این است‌که داشته باشیم : $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}>0$.

در این صورت خواهیم داشت :

$$0<x'<x''$$

ثالثاً− شرط لازم و کافی آنکه دو ریشه ، هر دو منفی باشند، این است‌که‌داشته باشیم، $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}<0$. دراین صورت داریم:

$$x'<x''<0$$

۲− بحث − مقصود از بحث در وجود و علامت ریشه‌های یك معادلهٔ پارامتری درجهٔ دوم، این است‌که ابتدا ببینیم به‌ازای چه مقادیر پارامتر ، معادله ریشه دارد و بعد به ازای این مقادیر ، علامت ریشه‌ها را تعیین‌کنیم .

۳- راه عملی برای بحث یك معادلهٔ پارامتری ، ازحل مسئله‌های زیر معلوم می‌شود :

مسئلهٔ ۱- به‌ازای چه مقادیر m ، این معادله دارای ریشه است ؟

$$(m^2+12)x^2+2(m-1)x+1=0$$

حل - برای آنکه این معادله ریشه داشته باشد لازم وکافی است که مبیّن آن مثبت یا صفر باشد ؛ بنابراین Δ را تشکیل می‌دهیم وآن را تعیین علامت می‌کنیم :

$$\Delta'=b'^2-ac=(m-1)^2-(m^2+12)=-2m-11$$

m	Δ	معادله
$-\infty$		
	+	دو ریشهٔ متمایز دارد
$-\frac{11}{2}$	۰	ریشهٔ مضاعف دارد
	−	ریشه ندارد
$+\infty$		

می‌بینیم‌که به ازای $m<-\frac{11}{2}$ ، معادلهٔ پارامتری فوق دارای دو ریشه است .

مسئلهٔ ۲ - به ازای چه مقادیر m معادلهٔ :

$$(m+1)x^2-2x+m^2-4m+3=0$$

دو ریشهٔ مختلف‌العلامه خواهد داشت ؟

حل - لازم وکافی است‌که $\frac{c}{a}$ منفی باشد؛ بنابراین $\frac{c}{a}$ را تشکیل می‌دهیم وآن را تعیین علامت می‌کنیم :

$$\frac{c}{a}=\frac{m^2-4m+3}{m+1}$$

علامت $\frac{c}{a}$ از این جدول بدست می‌آید (ریشه‌های c برابر ۱ و ۳ است) :

m	c یا m^2-4m+3	a یا $m+1$	$\frac{c}{a}$	معادله
$-\infty$				
	+	−	−	دو ریشهٔ مختلف‌العلامه
−۱		۰	∞	
	+	+	+	دو ریشهٔ متحدالعلامه
۱	۰		۰	
	−	+	−	دو ریشهٔ مختلف‌العلامه
۳	۰		۰	
	+	+	+	دو ریشهٔ متحدالعلامه
$+\infty$				

می‌بینیم‌که به ازای : $m<-1$ و $1<m<3$ ، معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه خواهد بود .

مسئلهٔ ۳ - می‌خواهیم در ازای مقادیر مختلف m در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ زیر بحث‌کنیم :

$$(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0$$

حل - چون در این مسئله باید ، هم در وجود و هم در علامت ریشه‌ها بحث شود ، باید Δ و $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را تشکیل داد وعلامت آنها را به ازای همهٔ مقادیر m معین‌کرد :

$$\Delta'=b'^2-ac=(2m-3)^2-(m-2)(5m-6)$$
$$=-m^2+4m-3=-(m-1)(m-3)$$

$$\frac{c}{a}=\frac{5m-6}{m-2}$$

$$-\frac{b}{a}=\frac{-2(2m-3)}{m-2}$$

علامت این مقادیر و نتیجهٔ مطلوب از جدول زیر بدست می‌آید:

m	Δ	$\frac{c}{a}$	$-\frac{b}{a}$	معادله
$-\infty$				
	−	+	−	ریشه ندارد
۱	۰			$x'=x''=\frac{-b}{2a}=\frac{-2m+3}{m-2}=-1$
	+	+	−	دو ریشهٔ منفی $x'<x''<0$
$\frac{6}{5}$		۰		$x''=0$ و $x'=-\frac{3}{2}$
	+	−	−	دو ریشهٔ مختلف‌العلامه $x'<0<x''$ $\|x'\|>\|x''\|$
$\frac{3}{2}$			۰	دو ریشهٔ قرینه
	+	−	+	دو ریشهٔ مختلف‌العلامه $x'<0<x''$ $\|x'\|<\|x''\|$
۲		∞	∞	یك ریشه برابر ۲−
	+	+	−	دو ریشهٔ منفی $x'<x''<0$
۳	۰			$x'=x''=-3$
	−	+	−	ریشه ندارد
$+\infty$				

۴ـ راه عملی برای بحث ـ برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های یك معادلهٔ پارامتری درجهٔ دوم ، عبارت Δ و $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را تشکیل می‌دهیم ومقادیرمخصوص پارامترراکه به ازای آنها هریك از این عبارات تغییرعلامت می‌دهد حساب می‌کنیم . این مقادیررا به‌ترتیب صعودی در یك جدول می‌نویسیم و در فاصلهٔ بین هر دو مقدار مخصوص متوالی علامت Δ و $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ رامعین می‌کنیم وسپس طبق شمارهٔ قبل

(یادآوری) وجود و علامت ریشه‌ها را در هر فاصله مشخص می‌کنیم .

تبصرهٔ ۱ـ اگر مانند مسئلهٔ ۱ فقط منظور بحث در وجود ریشه‌ها باشد ،کافی است‌که فقط علامت Δ را در ازای مقادیر مختلف پارامتر معین‌کنیم .

تبصرهٔ ۲ـ اگر مانند مسئلهٔ ۲ بخواهیم مقادیری از پارامتر را که به‌ازای آنها معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است معین‌کنیم ، کافی است که فقط علامت $\frac{c}{a}$ را تعیین‌کنیم .

دقت‌کنید! چنانکه درجدول اخیر می‌بینید ، در مقابل اندازهٔ $m=2$ (که به ازای آن a برابر صفر می‌شود) نوشته شده است «معادله دارای یك ریشهٔ ۲− است» ؛ زیرا اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم مفروض به جای m عدد ۲ را قرار دهیم ، آن معادله به معادلهٔ درجهٔ اول $2x+4=0$ تبدیل می‌شود که ریشهٔ آن همان ۲− است . از طرف دیگر ، درجدول نوشته شده است‌که در این حال حاصل ضرب دو ریشه ∞ است ؛ بنابراین می‌توان‌گفت که این معادلهٔ درجهٔ اول ، یا معادلهٔ درجهٔ دوم $0\times x^2+2x+4=0$ دارای دو ریشه ، یکی ۲− ودیگری ∞ است .

بطورکلی می‌توان ثابت کرد که وقتی ضریب جملهٔ درجهٔ دوم ، در یك معادلهٔ پارامتری درجهٔ دوم ، رفته رفته به سمت صفر میل‌کند ، قدر مطلق یکی از ریشه‌های معادله کم‌کم بزرگ می‌شود ، و وقتی‌که ضریب جملهٔ درجهٔ دوم صفر شد ، آن ریشه ∞ می‌شود . اینك اثبات این مطلب :

فرض می‌کنیم که ضرایب a ، b و c از معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ تابعهای پیوسته‌ای از پارامتر m (یا پارامترهایی) باشند و در ازای $m=m_1$ ضریب x^2 یعنی a صفر شود. بنابراین اگر b و c در ازای $m=m_1$ برابر b' و c' باشند، معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت معادلهٔ درجهٔ اول $b'x+c'=0$ در می‌آید که ریشهٔ آن $-\frac{c'}{b'}$ می‌باشد (به شرط آنکه b' نیز صفر نباشد). حال گوییم که هنگامی‌که m رفته رفته به m_1 نزدیك می‌شود، a به سوی صفر و b به سوی b'، و c به سوی c' میل می‌کنند و b^2-4ac به سوی b'^2 که مثبت است میل خواهدکرد؛ لذا معادله، دو ریشه خواهد داشت که به فرض مثبت بودن b ، یکی از آنها:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

به $-\frac{b'}{0}$ نزدیك می‌شود. یعنی قدر مطلق ریشهٔ x_1 بی‌اندازه بزرگ خواهد شد و ریشهٔ دیگر:

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

به صورت $\frac{-b'+b'}{0}$ ، یعنی به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آیدکه برای رفع ابهام آن می‌توان چنین عمل‌کرد:

$$x_2=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$$

ومی‌بینیم‌که اگر $a\to 0$ و $b\to b'$ و $c\to c'$ ، مقدار x_2 برابر $-\frac{c'}{b'}$ می‌شودکه همان اندازه‌ای است‌که از معادلهٔ $b'x+c'=0$ بدست می‌آید.

اما اگر b (ضریب x) نیز به‌ازای $m=m_1$ صفر شود (بی‌آنکه c' صفر باشد)، قدر مطلق هر دو ریشه بی‌اندازه بزرگ خواهد شد؛ زیراکه در این حال، دوریشهٔ معادله هردو به‌صورت $-\frac{c'}{0}$ در می‌آیند و معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $0\times x^2+0\times x+c'=0$ درمی‌آید که **ممتنع** است.

و اگرهرسه ضریب (a و b ، c) به‌ازای $m=m_1$ صفرشوند، معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $0\times x^2+0\times x+0=0$ درمی‌آیدکه کلیهٔ اعداد می‌توانند ریشهٔ آن باشند. مثلا در معادلهٔ پارامتری:

$$(2m+1)(m^2-1)x^2+(2m+1)(m+1)x+m+1=0$$

به ازای $m=1$ فقط a صفر می‌شود؛ بنابراین قدر مطلق یکی از دو ریشهٔ معادله ∞ است.

وبه ازای $m=-\frac{1}{2}$ هم a و هم b صفرمی‌شوند؛ بنابراین قدر مطلق هر دو ریشهٔ معادله ∞ است.

و به ازای $m=-1$ هم a و هم b و هم c صفر می‌شوند؛ بنابراین معادله ریشه‌های بیشمار دارد.

تمرین

۱ـ تعیین‌کنیدکه به ازای چه مقادیر m هریك از معادله‌های درجهٔ دوم ریشه دارد:

الف - $4x^2+12x+m-1=0$

ب - $4x^2+12x+m+1=0$

ج - $mx^2+42x+49=0$

د - $(3m^2+3m+1)x^2-(3m+2)x+1=0$

ه - $x^2-2x+m^2-2m+7=0$

و - $(m-1)x^2+(m-3)x+m-2=0$

۲- به ازای چه مقادیر k هریك از معادلات زیر دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است :

الف - $kx^2-36x+1=0$

ب - $kx^2-5x+k^2-4=0$

ج - $(k^2+1)x^2-2kx+k^2-k-2=0$

د - $(3k^2-5k+2)x^2-2x+k^2-7k+6=0$

۳- به ازای مقادیر مختلف پارامتر در وجود و علامت ریشه‌های هریك از معادلات زیر بحث کنید :

الف - $x^2-2(m+1)x-3m-5=0$

ب - $(m+1)x^2-(m-3)x-(m+3)=0$

ج - $(m+1)x^2-4x-2(2m+1)=0$

د - $(3m-2)x^2-2(5m-2)x+3(2m+1)=0$

ه - $x^2-4(m-3)x+6(m^2-5m+6)=0$

و - $2x^2+2(m+1)x+m^2+m-12=0$

ز - $x^2-2(m-2)x+2m^2-15m-8=0$

ح - $(m^2-5m+6)x^2-2(m^2-6m+8)x+m^2-7m+12=0$

ط - $(m+1)x^2+(5m+8)x+10m+16=0$

ی - $3x+m+\frac{2x+11}{2x-1}=\frac{6x^2-x+4}{2x-3}$

یا - $mx^2+(2m-3)x+4m-6=0$

یب - $(m-3)x^2+(7m+6)x+10m-3=0$

ید - $(2m-1)x^2-(13m+7)x-(7m+10)=0$

۴- اولاً پارامتر y در چه حدودی باید تغییر کند تا هریك ازدومعادلهٔ:

$$4x^2-6yx+y^2-18x+2y+1=0$$
$$x^2+6yx+y^2+2x+2y+5=0$$

جواب داشته باشد . ثانیاً اگر y را مجهول و x را پارامتر بگیریم ، x در چه حدود می‌تواند تغییرکند تا هریك از معادلات فوق ریشه داشته باشند ؟

II - مقایسهٔ یك عدد با ریشه‌ها

۵ - در صورتی‌که معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ x' و x'' باشد ، منظور از مقایسهٔ عدد مفروضی مانند α باریشه‌های این معادله ، این است که بدون حل معادله وضع α را نسبت به دو ریشه تعیین‌کنیم ، یعنی ببینیم‌که α از هردو ریشه بزرگتر یا بین دو ریشه یا از هردو ریشه کوچکتر است .

چنانکه می‌دانیم علامت سه جمله‌ای $f(x)=ax^2+bx+c$ به ازای همهٔ مقادیر x موافق علامت a است مگر به ازای مقادیر بین دو ریشه‌که در این صورت علامت سه جمله‌ای مخالف علامت a است .

بنابراین برای سنجیدن α با ریشه‌های معادلهٔ :

$$f(x)=ax^2+bx+c=0$$

مقدار $f(\alpha)$ یعنی $a\alpha^2+b\alpha+c$ را حساب می‌کنیم . سه حالت ممکن است اتفاق افتد :

اولاً – $f(\alpha)=0$ ، پس α یکی از ریشه‌های معادلهٔ مفروض است.

ثانیاً – علامت $f(\alpha)$ مخالف علامت a است ، یعنی $af(\alpha)<0$.

در این صورت معادلهٔ مفروض دارای دو ریشهٔ متمایز x' و x'' ($x'<x''$) است و α بین آن دو ریشه می‌باشد ، یعنی :

$$x'<\alpha<x''$$

ثالثاً – علامت $f(\alpha)$ موافق علامت a است ، یعنی $af(\alpha)>0$.

پس اگر $\Delta>0$ باشد ، معادلهٔ مفروض دارای دو ریشهٔ x' و x'' ($x'<x''$) است و α خارج دو ریشه می‌باشد و نسبت به ریشه‌ها یکی از دو وضع زیر را دارد :

یا : $\alpha<x'<x''$ یا : $x'<x''<\alpha$

برای اینکه ببینیم که کدامیك از دو وضع را دارد (یعنی آیا از هر دو ریشه بزرگتر است یا از هر دو ریشه کوچکتر) ، کافی است که عدد α را با یکی از اعداد بین دو ریشه مقایسه کنیم . اما می‌دانیم که نصف مجموع دو ریشه ، یعنی :

$\frac{x'+x''}{2}=-\frac{b}{2a}$ بین دو ریشه واقع است ، بنابراین α را با $-\frac{b}{2a}$ مقایسه می‌کنیم :

چنانچه داشته باشیم : $\alpha>-\frac{b}{2a}$ یا : $\alpha+\frac{b}{2a}>0$ ، α از هر دو ریشه بزرگتر است ، یعنی :

$$x'<x''<\alpha$$

و چنانچه داشته باشیم : $\alpha<-\frac{b}{2a}$ یا : $\alpha+\frac{b}{2a}<0$ ، α از هر دو ریشه کوچکتر است ، یعنی :

$$\alpha<x'<x''$$

توجه کنید! در حالت اخیر (ثالثاً) اگر عددی را بشناسیم که بین دو ریشه باشد ، کافی است α را (به جای مقایسه با نصف مجموع دو ریشه) با آن عدد مقایسه کنیم ، نتیجه یکی خواهد بود.

اگر $\alpha=0$ باشد ، تعیین وضع آن نسبت به ریشه‌ها در حقیقت تعیین علامت ریشه‌های معادله است .

بطور خلاصه ، وضع یك عدد ، مانند α را نسبت به ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c=0$ از روی جدول زیر می‌توان فهمید :

به شرط :	معلوم می‌شود که :
$af(\alpha)=0$	α ریشهٔ معادله است .
$af(\alpha)<0$	معادله دو ریشه دارد و α بین آنهاست. $x'<\alpha<x''$
$\begin{cases} af(\alpha)>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$	معادله ریشه ندارد .
$\begin{cases} af(\alpha)>0 \\ \Delta>0 \\ \alpha+\frac{b}{2a}>0 \end{cases}$	معادله دو ریشه دارد و α از هر دو ریشه بزرگتر است . $x'<x''<\alpha$
$\begin{cases} af(\alpha)>0 \\ \Delta>0 \\ \alpha+\frac{b}{2a}<0 \end{cases}$	معادله دو ریشه دارد و α از هر دو ریشه کوچکتر است . $\alpha<x'<x''$

مثال ۱ – برای مقایسهٔ عدد ۱ با ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x+4=0$ ، چنین عمل می‌کنیم :

$$af(1)=1(1-7+4)=-2$$

بنابراین معادلهٔ فوق دارای دوریشه است و عدد ۱ مابین دوریشه قرار دارد .

مثال ۲ــ مقایسهٔ عدد ۳ــ باریشه‌های‌معادلهٔ $2x^2-7x+2=0$.

چون :

$$af(-3)=2\times 41>0$$

و Δ نیز مثبت است ، این معادله دارای دو ریشه است و ۳ــ خارج آنهاست ، وچون :

$$-3+\frac{b}{2a}=-3-\frac{7}{4}=\frac{-19}{4}<0$$

عدد ۳ــ از هر دو ریشه‌کوچکتر است.

مثال ۳ــ مقایسهٔ عدد ۶ با ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+4=0$.

چون : اولاً $af(6)=4>0$ ، ثانیاً $\Delta>0$ ، ثالثاً $6+\frac{b}{2a}=3>0$ ، عدد ۶ از هر دو ریشهٔ این معادله بزرگتر است .

مثال ۴ــ مقایسهٔ عدد ۲ با ریشه‌های معادلهٔ $x^2+7x-4=0$.

چون $\frac{c}{a}$ منفی است ، این معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است و چون $af(2)=14>0$ ، ۲ خارج دو ریشه می‌باشد و چون آن را با صفر که می‌دانیم بین این دو ریشه است (چرا ؟) مقایسه کنیم، نتیجه می‌گیریم که ۲ از هر دو ریشه بزرگتر است .

۶ــ بدون تشکیل دادن مبین ، می‌توان تحقیق کرد که معادله‌ای به شکل :

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)-k^2=0$$

[مانند معادلهٔ $(x+3/5)(x+2)-5=0$] دارای دو ریشهٔ متمایز

است ، زیرا فوراً ملاحظه می‌کنیم که $af(\alpha)=-k^2$ ، یعنی منفی است . پس معادله ، دوریشهٔ متمایزداردکه α (همچنین β) بین آنهاست .

۷ــ ازآنچه‌گذشت و بخصوص ملاحظهٔ جدول شمارهٔ ۵ ، طریقهٔ مقایسهٔ یك عدد α با ریشه‌های یك معادلهٔ درجهٔ دوم پارامتری چنین بدست می‌آید :

الف ــ عبارتهای Δ و $af(\alpha)$ و $\alpha+\frac{b}{2a}$ را تشکیل می‌دهیم .

ب ــ مقادیر مخصوص پارامتررا که به ازای آنها هریك از این عبارات تغییر علامت می‌دهند ، حساب می‌کنیم .

ج ــ این مقادیر را به ترتیب صعودی در یك جدول می‌نویسیم .

د ــ در فاصلهٔ بین هر دو مقدار مخصوص متوالی ، علامت Δ و $af(\alpha)$ و $\alpha+\frac{b}{2a}$ رامعین می‌کنیم و از روی‌آن وضع عدد α را در هریك از این فواصل نسبت به ریشه‌ها مشخص می‌کنیم .

مثال ــ معادلهٔ $f(x)\equiv(m+1)x^2-2(m-2)x+4=0$ مفروض است . به ازای مقادیر مختلف m ، عدد ۳ را با ریشه‌های آن مقایسه‌کنید .

حل ــ داریم :

$$\Delta'=(m-2)^2-4(m+1)=m^2-8m$$

$$af(3)=(m+1)[9(m+1)-6(m-2)+4]$$
$$=(m+1)(3m+25)$$

$$3+\frac{b}{2a}=3-\frac{m-2}{m+1}=\frac{2m+5}{m+1}$$

Δ' به‌ازای $m=0$ و $m=8$ ،

و $af(3)$ به‌ازای $m=-1$ و $m=-\frac{25}{3}$ ،

و $3+\frac{b}{2a}$ به‌ازای $m=-\frac{5}{2}$ و $m=-1$ ،

تغییر علامت می‌دهند . این مقادیر مخصوص را به ترتیب صعودی در جدولی می‌بریم و درفواصلی‌که بدست می‌آید با تعیین علامت Δ' و $af(3)$ و $3+\frac{b}{2a}$ ، عدد ۳ را با ریشه‌ها مقایسه می‌کنیم . چنانچه طبق معمول فرض‌کنیم $x'<x''$ ، جدولی به صورت زیر خواهیم داشت :

m	Δ	$af(3)$	$3+\frac{b}{2a}$	نتیجه
$-\infty$				
	$+$	$+$	$+$	$x'<x''<3$
$-\frac{25}{3}$		0		$x'<x''=3$
	$+$	$-$	$+$	$x'<3<x''$
$-\frac{5}{2}$			0	$x'<-\frac{b}{2a}=3<x''$
	$+$	$-$	$-$	$x'<3<x''$
-1		0	∞	یك ریشه ∞ ودیگری $-\frac{2}{3}$
	$+$	$+$	$+$	$x'<x''<3$
0	0			$x'=x''<3$
	$-$	$+$	$+$	معادله ریشه ندارد
8	0			$x'=x''<3$
	$+$	$+$	$+$	$x'<x''<3$
$+\infty$				

تمرین

۱ـ عدد ۱- را با ریشه‌های معادله‌های زیر مقایسه‌کنید :

الف ـ $x^2-8x+3=0$ ب ـ $2x^2+12x+5=0$

ج ـ $-3x^2-10x+17=0$ د ـ $5x^2-15x+11=0$

۲ـ هریك از عددهای ۳ ، ۱ ، ۲ ، ۰ و ۳- را با ریشه‌های هریك ازمعادلات زیرمقایسه و بالنتیجه وضع ریشه‌های هریك از معادلات را نسبت به پنج عدد فوق معین‌کنید :

الف ـ $x^2-2x-20=0$ ب ـ $2x^2-3x-9=0$

ج ـ $-3x^2+8x+2=0$ د ـ $2x^2-5x+1=0$

۳ـ به‌ازای مقادیر مختلف m ، ریشه‌های هر معادله را با عددی‌که در مقابل آن است مقایسه‌کنید :

الف ـ $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ با عدد ۳

ب ـ $x^2+(m+4)x+m+7=0$ « ۲

ج ـ $mx^2-2(m+2)x+m+3=0$ « ۳-

د ـ $mx^2+2(3m-2)x+4m-3=0$ « ۱-

هـ ـ $(m+1)x^2-2(m+2)x+2m=0$ « ۱-

و ـ $(m-3)x^2-2(3m+1)x+9m-2=0$ « ۲-

۴ـ به‌ازای چه مقادیر m ، عدد ۳ بین ریشه‌های یکی از معادله‌های زیر است :

الف ـ $4x^2-(m+1)x+2=0$

ب ـ $2mx^2-8mx+5+m=0$

۵ـ اگر درمعادلهٔ درجهٔ دوم $f(x)=0$ به جای x عدد α بگذارید چه وقت از روی علامت $f(\alpha)$ خواهیدگفت‌که معادله حتماً ریشه دارد ؛ ثابت کنیدکه هریك از معادله‌های زیر دارای ریشه است :

الف- $(x-1)(x+3)-9=0$

ب- $(x-a)(x-b)-c^2=0$

ج- $(x+2)(x-5)+x^2-9=0$

د- $(x-1)(x-4)+(x-2)(x-5)=0$

III - مقایسهٔ دو عدد با ریشه‌ها

۸- قضیه - شرط لازم وکافی برای آنکه یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم : $f(x)\equiv ax^2+bx+c=0$ ، بین دو عدد α و β $(\alpha<\beta)$ باشد ، این است که داشته باشیم : $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

برهان - زیرا با فرض $x'<x''$ ، وضع α و β با ریشه‌ها به‌یکی از دو صورت زیر خواهد بود :

$$x'<\alpha<x''<\beta$$

یا : $$\alpha<x'<\beta<x''$$

در صورت اول‌داریم : $af(\alpha)<0$ و $af(\beta)>0$ ،

و در صورت دوم داریم : $af(\beta)<0$ و $af(\alpha)>0$

پس درهردوصورت $a^2 f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ و چون a^2 مثبت است ، نتیجه می‌گیریم که $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ و بعکس اگر $f(\alpha)\cdot f(\beta)$ منفی باشد ، یکی از دو عدد α و β بین دو ریشه و دیگری خارج دو ریشه است .

۹- راه مقایسهٔ دو عدد α و β با ریشه‌های یك معادلهٔ درجهٔ دوم از حل مسئلهٔ زیر معلوم می‌شود .

مسئله - برحسب مقادیر مختلفهٔ m اعداد ۲− و ۳ را با ریشه‌های معادلهٔ زیر مقایسه‌کنید :

$$(m-1)x^2-2mx+1=0$$

حل - بهتر آن است که هریك از دوعدد ۲− و ۳ را با ریشه‌ها مقایسه‌کنیم و نتیجه را در یك جدول بنویسیم .

برای این منظور (برطبق شمارهٔ ۷ همین فصل) ، Δ و $af(-2)$ و $-2+\frac{b}{2a}$ و $af(3)$ و $3+\frac{b}{2a}$ را تشکیل می‌دهیم و علامت هریك را تعیین می‌کنیم و نتیجه را در جدولی چنین می‌نویسیم :

$$\Delta'=b'^2-ac=m^2-m+1$$

$$af(-2)=(m-1)(8m-3)$$

$$-2+\frac{b}{2a}=-2-\frac{m}{m-1}=\frac{-3m+2}{m-1}$$

$$af(3)=(m-1)(3m-8)$$

$$3+\frac{b}{2a}=3-\frac{m}{m-1}=\frac{2m-3}{m-1}$$

m	Δ	af(−۲)	$-۲+\frac{b}{۲a}$	af(۳)	$۳+\frac{b}{۲a}$	نتیجه
$-\infty$						
	+	+	−	+	+	$-۲<x'<x''<۳$
$\frac{۳}{۸}$		۰				$-۲=x'<x''<۳$
	+	−	−	+	+	
$\frac{۲}{۳}$			۰			$\{x'<-۲<x''<۳$
	+	−	+	+	+	
۱		۰	∞	۰	∞	یك ریشه ∞
	+	+	−	−	−	
$\frac{۳}{۴}$					۰	$\{-۲<x'<۳<x''$
	+	+	−	−	+	
$\frac{۸}{۳}$				۰		$-۲<x'<x''=۳$
	+	+	−	+	+	$-۲<x'<x''<۳$
$+\infty$						

تمرین

۱ـ تعیین‌کنید به ازای چه مقادیر m هریك از معادله‌های زیر دارای یك ریشهٔ واقع بین اعداد ۲+ و ۴− می‌باشد :

الف ـ $x^۲+(m-۱)x+۱=۰$

ب ـ $۲mx^۲-۳x+m-۱=۰$

ج ـ $(m+۱)x^۲-۲mx-۴=۰$

د ـ $x^۲-۲mx+۲m^۲-۲m+۵=۰$

۲ـ بدون تشکیل دادن‌مبین، به وسیلهٔ مقایسهٔ ریشه‌ها با دوعدد، ثابت

کنیدکه هریك از معادله‌های زیر دارای دو ریشه می‌باشد :

الف ـ $(x^۲-۱)+mx(x-۳)=۰$

ب ـ $x(x+۴)+m(x^۲-۱)=۰$

ج ـ $x^۲-۳x+۲-۳m(۲x-۳)=۰$

۳ـ ریشه‌های معادله‌های زیر را به ازای مقادیر مختلف پارامتر بادو عدد ۱ و ۳ مقایسه‌کنید :

الف ـ $x^۲-۳mx+۲m+۱=۰$

ب ـ $mx^۲+۲(۳m-۲)x+۴m-۳=۰$

ج ـ $x^۲-۲(m+۲)x+۲m+۱=۰$

۴ـ تحقیق‌کنیدکه به‌ازای چه مقادیر m ریشه‌های معادلهٔ زیرکوچکتر از عددهای ۱− و ۲ می‌باشند:

$$(m-۳)x^۲-mx+۴m-[illegible]=۰$$

۵ـ به‌ازای چه مقادیر m عدد ۳ داخل‌ریشه‌ها و عدد ۲− کوچکتر از ریشه‌های معادلهٔ: $(m+۱)x^۲+۲mx-۱=۰$ می‌باشد .

۶ـ به ازای چه مقادیر m ریشه‌های معادلهٔ زیر محصور بین ۱+ و ۱− است :

$$x^۲-(m+۱)x+۲m-۳=۰$$

۷ـ به ازای چه مقادیر m دو عدد ۳ و ۱ بزرگتر از ریشه‌های این معادله می‌باشند : $mx^۲+۲(m-۳)x+m-۱=۰$

۸ـ به‌ازای‌چه مقادیر m ریشه‌های معادلهٔ زیر بزرگتراز ۱ و ۱− می‌باشند : $(m-۱)x^۲-۲mx+۳m=۰$

IV – بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم پارامتری و مقایسهٔ اعداد با ریشه‌ها به‌کمك نمودار

۱۰– اگر ضریبهای يك معادلهٔ درجهٔ دوم پارامتری ، نسبت به پارامتر از درجهٔ اول باشند (بطورکلی وقتی‌که بتوان معادله را به حسب پارامتر حل‌کرد) ، می‌توان بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله و همچنین مقایسهٔ اعداد با ریشه‌ها را به‌کمك نمودار به طریق سهلتری انجام داد . چند مثال زیر طرز عمل را روشن می‌کند :

مثال ۱– می‌خواهیم به ازای مقادیر مختلف m ، در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ زیر بحث‌کنیم :

$$(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0 \qquad (1)$$

ابتدا پارامتر m را برحسب x از این معادله بدست می‌آوریم :

$$m=\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \qquad (2)$$

حال اگر منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \qquad (3)$$

را رسم‌کنیم ، می‌توان گفت‌که ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) یا (۲) ، طولهای نقاط برخورد خط $y=m$ و منحنی نمایش تغییرات تابع (۳) می‌باشند . بنابراین از روی منحنی می‌توان بآسانی گفت که به ازای چه مقادیری از m این خط منحنی را قطع می‌کند یاقطع نمی‌کند یا بر آن مماس است ، یعنی به ازای چه مقادیر m معادلهٔ (۱) دارای دو ریشه است ، یا ریشه ندارد یا ریشهٔ مضاعف دارد ؛ و علاوه براین ، در

موقعی‌که خط منحنی را قطع می‌کند ریشه‌ها چه علامت دارند . جدول تغییرات تابع (۳) چنین است :

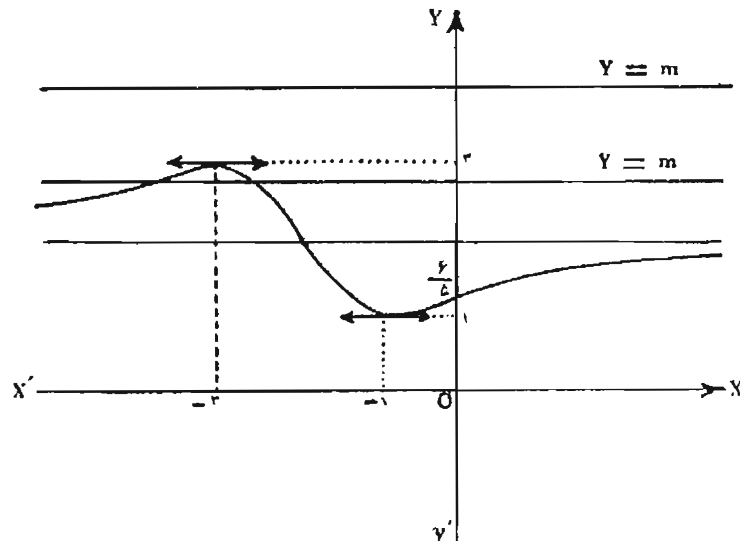
x	−∞		−۳		−۱		+∞
y′		+	۰	−	۰	+	
y	۲	↗	۳	↘	۱	↗	۲
			ماکزیمم		مینیمم		

ومنحنی نمایش تغییرات آن در زیر رسم شده است .

چنانکه از روی شکل می‌بینیم :

به ازای $m<1$ خط $y=m$ منحنی را قطع نمی‌کند ، یعنی معادلهٔ (۱) دارای ریشه نیست .

به‌ازای $m=1$ خط $y=m$ برمنحنی مماس است ، یعنی معادله دارای ریشهٔ مضاعف برابر ۱– است (طول نقطهٔ مینیمم) .



به ازای $1<m<\frac{۶}{۵}$ خط $y=m$ منحنی را در دو نقطه در طرف چپ محور yها قطع می‌کند ، یعنی معادله دارای دو ریشهٔ منفی است .

به ازای $m=\frac{۶}{۵}$ خط $y=m$ منحنی را در دو نقطه قطع می‌کند که یکی از آنها روی محور yهاست، یعنی معادله دارای دو ریشه است که یکی برابر صفر و دیگری منفی است .

به ازای $\frac{۶}{۵}<m<۲$ خط $y=m$ منحنی را در دو نقطه در دو طرف محور yها قطع می‌کند ، یعنی معادله دارای دو ریشهٔ مختلف ـ العلامه است .

به ازای $m=۲$ خط $y=m$ منحنی را در بینهایت و یك نقطهٔ چپ محور yها قطع می‌کند ، یعنی یکی از ریشه‌ها ∞ و ریشهٔ دیگر منفی است .

به ازای $۲<m<۳$ خط $y=m$ منحنی را در دو نقطه ، در طرف چپ محور yها قطع می‌کند ، یعنی معادله دارای دو ریشهٔ منفی است .

به‌ازای $m=۳$ خط $y=m$ برمنحنی مماس است ، یعنی معادله دارای ریشهٔ مضاعف برابر ۳− است (طول نقطهٔ ماکزیمم) .

به ازای $m>۳$ خط $y=m$ منحنی را قطع نمی‌کند ، یعنی معادله دارای ریشه نیست .

در وجود و علامت ریشه‌های این معادله ، قبلاً نیز بحث‌کرده بودیم (مسئلهٔ ۳ ازشمارهٔ ۳همین فصل) . ببینیدکه آیا نتیجهٔ بدست‌آمده از این دو راه یکی است ؟

مثال ۴- می‌خواهیم اعداد ۲− و ۳ را با ریشه‌های معادلهٔ زیر برحسب مقادیر مختلف m مقایسه‌کنیم :

$$(m-۱)x^۲-۲mx+۱=۰ \qquad (۱)$$

ابتدا پارامتر m رابرحسب x از این معادله بدست می‌آوریم :

$$m=\frac{x^۲-۱}{x^۲-۲x}$$

حال اگر اولاً منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{x^۲-۱}{x^۲-۲x} \qquad (۲)$$

و ثانیاً دو خط (Δ) و (D) را به معادلات $x=-۲$ و $x=۳$ (دو عددی‌که ریشه‌ها را می‌خواهیم با آنها مقایسه‌کنیم) در یك دستگاه مختصات رسم کنیم ، بآسانی از روی شکل دیده خواهد شدکه وقتی‌که خط $y=m$ به ازای مقادیر مختلف m منحنی را قطع می‌کند ، طول نقاط برخورد (ریشه‌های معادلهٔ ۱) نسبت به دو عدد ۲− و ۳ چه وضعی دارند .

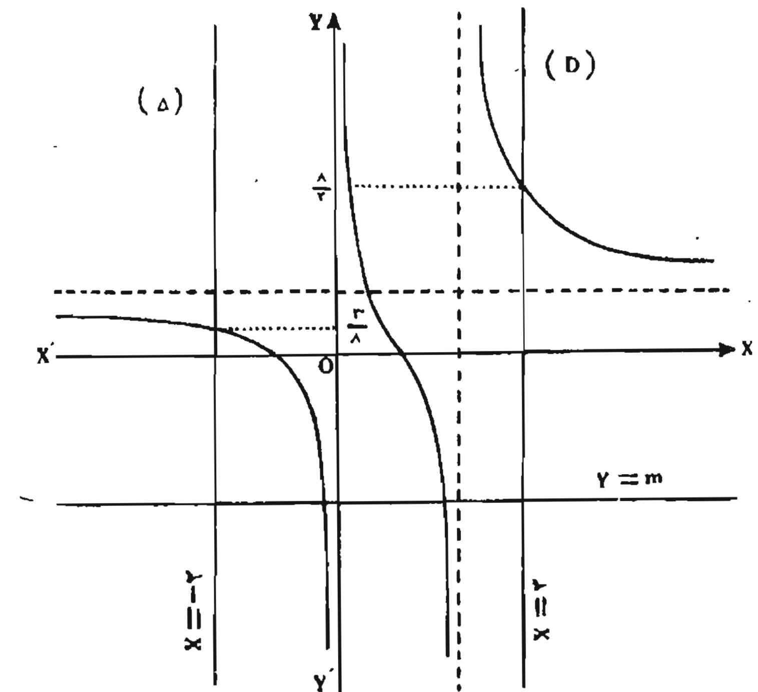
جدول تغییرات تابع (۲) چنین است :

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		۳		$+\infty$
y'		−		−		−		−		−	
y	۱	↘	$\frac{۳}{۸}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{۸}{۳}$	↘	۱

$x=\pm ۱$

$y=۰$

و از آنجا منحنی نمایش تغییرات تابع و دو خط $x=-2$ و $x=3$ به این شکل است :



چنانکه از روی شکل می‌بینیم :

به ازای $m<\frac{3}{8}$ خط $y=m$ منحنی را در دو نقطهٔ واقع بین (D) و (Δ) قطع می‌کند ، یعنی $-2<x'<x''<3$.

به ازای $m=\frac{3}{8}$ خط $y=m$ منحنی را در دو نقطه ، یکی روی (Δ) ودیگری بین(D) و (Δ) قطع می‌کند، یعنی $-2=x'<x''<3$.

به ازای $\frac{3}{8}<m<1$ خط $y=m$ منحنی را دردو نقطه ، یکی

طرف چپ خط (Δ) و دیگری بین (D) و (Δ) قطع می‌کند ، یعنی $x'<-2<x''<3$.

به ازای $m=1$ خط $y=m$ منحنی را در نقطهٔ بینهایت دور و در نقطهٔ دیگری بین (D) و (Δ) قطع می‌کند ، یعنی قدرمطلق یك ریشهٔ معادله بینهایت و ریشهٔ دیگرش بین ۲- و ۳ است .

به ازای $1<m<\frac{8}{3}$ خط $y=m$ منحنی را در دو نقطه ، یکی طرف راست خط (D) و دیگری بین (Δ) و (D) قطع می‌کند ، یعنی $-2<x'<3<x''$.

به ازای $m=\frac{8}{3}$ خط $y=m$ منحنی را در دو نقطه ، یکی روی خط (D) و دیگری بین (Δ) و (D) قطع می‌کند ، یعنی $-2<x'<3=x''$.

به ازای $m>\frac{8}{3}$ خط $y=m$ منحنی را در دو نقطه ، بین (D) و (Δ) قطع می‌کند ، یعنی $-2<x'<x''<3$.

اعداد ۲- و ۳ را ، قبلاً نیز با ریشه‌های این معادله مقایسه‌کرده بودیم (شمارهٔ ۹ ، مسئله ، همین فصل) . ببینیدکه آیا نتیجهٔ بدست‌آمده از این دو راه یکی است ؟

تمرین

۱- به‌ازای مقادیرمختلف m در وجود وعلامت ریشه‌های این معادلات به وسیلهٔ رسم منحنی بحث‌کنید :

الف- $x^2-2(m+1)x+3m-5=0$

ب- $(m-1)x^2-(m-3)x-(m+3)=0$

ج- $(m+1)x^2-4x-2(2m-1)=0$

۲ـ به ازای مقادیر مختلف پارامتر ریشه‌های معادله‌های زیر را با اعداد ۱ و ۳ به‌وسیلهٔ رسم منحنی مقایسه‌کنید:

الف ـ $(m+1)x^2-3mx+2m+1=0$

ب ـ $mx^2+2(3m-2)x+4m-3=0$

ج ـ $(m-3)x^2-2(m+2)x+2m+1=0$

۳ـ ریشه‌های معادله‌های زیر را با اعداد ۱ـ و ۲ مقایسه‌کنید و نتیجهٔ مقایسه را به‌وسیلهٔ رسم منحنی تحقیق‌کنید:

الف ـ $x^2-2mx+2m^2-4m=0$

ب ـ $(m-1)x^2-2mx+4=0$

ج ـ $mx^2-(m-1)x+3=0$

د ـ $(1+m)x^2-2mx+1-2m=0$

۴ـ تابع $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-x-2}$ داده می‌شود. اولاً جدول تغییرات و منحنی نمایش آن را رسم‌کنید. ثانیاً از روی آن در وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ $(m-1)x^2-mx-2m-2=0$ بحث‌کنید. ثالثاً به ازای مقادیرمختلف m دو عدد ۱ـ و ۱+ را با ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم مقایسه‌کنید.

۵ ـ تابع $y=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+3x}$ مفروض است. الف ـ جدول تغییرات ومنحنی نمایش آن رادرسم‌کنید. ب ـ در نقاط تقاطع خط $y=m$ با منحنی نمایش تغییرات این تابع، برحسب مقادیرمختلف m بحث‌کنید. ج ـ اگر این خط منحنی را در دو نقطهٔ M و P قطع‌کند، معادله‌ای برحسب مقدار m بقسمی تعیین‌کنیدکه $\widehat{MOP}$ قائمه شود.

۶ ـ تابع $y=\dfrac{1-2x}{(x-2)^2}$ در دست است اولاً جدول تغییرات و منحنی نمایش تغییرات‌آن را رسم‌کنید. ثانیاً درنقاط برخورد خط $y=m$ با منحنی‌نمایش تغییرات تابع برحسب مقادیرمختلف m بحث‌کنید. ثالثاً معادلهٔ

درجهٔ دوم پارامتری بدست آوریدکه بحث نقاط برخورد (ثانیاً) همان بحث در وجود وعلامت ریشه‌های آن باشد. رابعاً m را بقسمی تعیین کنیدکه اگر خط $y=m$ منحنی را در دونقطهٔ M و N قطع‌کند، طول نقطهٔ وسط پاره‌خط MN برابر ۳ شود.

۷ـ اولاً جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ را رسم کنید. ثانیاً m در چه فاصله‌ای تغییرکند تا آنکه خط $y=m$ منحنی نمایش تغییرات تابع فوق را در دو نقطه قطع‌کند. ثالثاً ریشه‌های معادلهٔ $m=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ را با دو عدد ۲ و ۱ـ برحسب مقادیر مختلف m مقایسه‌کنید.

فصل ششم

تعیین عدهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم واندازهٔ تقریبی آنها

به کمك رسم منحنی و بحث در معادله

۱ـ معادلهٔ درجهٔ سوم کامل ـ هر معادلهٔ درجهٔ سوم کامل، در حالت‌کلی، به این شکل است:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad (1)$$

همواره می‌توان باانتخاب مجهول‌کمکی، مانند $x=X-\frac{b}{3a}$، جملهٔ درجهٔ دوم معادلهٔ درجهٔ سوم‌کامل را از بین برد و آن را به این شکل درآورد:

$$x^3+px+q=0 \qquad (2)$$

زیراکه اگر در معادلهٔ (۱) به جای x مقدار $X-\frac{b}{3a}$ را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$a\left(X-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(X-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(X-\frac{b}{3a}\right)+d=0$$

که پس از اختصار چنین می‌شود:

$$X^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}X+\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}=0$$

که اگر ضریب X را p و مقدار معلوم را q بنامیم، می‌بینیم‌که معادله به شکل مطلوب (۲) درآمده است.

توجه‌کنید! در معادلهٔ درجهٔ سومی که به این صورت است: $ax^3+bx^2+d=0$ (ضریب جملهٔ درجهٔ اول صفر است) بهتر است مجهول‌کمکی را چنین بگیریم: $x=\frac{1}{X}$، تا معادله به شکل مطلوب درآید.

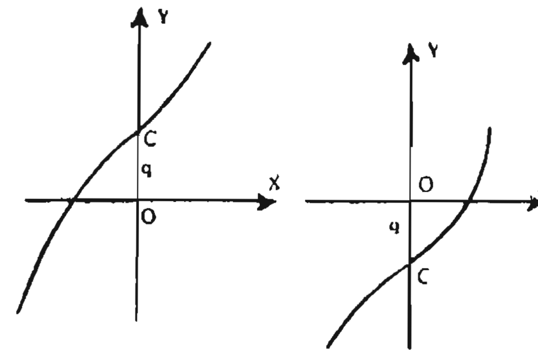
۲ـ تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+px+q=0$:

ریشه‌های معادلهٔ $x^3+px+q=0$ (۲) همان طولهای نقاط برخورد منحنی $y=x^3+px+q$ (۳) با محور xهاست. بنابراین اگرمنحنی نمایش تغییرات تابع (۳) را رسم‌کنیم، بآسانی می‌توانیم تعداد ریشه‌های معادلهٔ (۲) را بدست آوریم. زیرا اگر منحنی در سه نقطه محور xها را قطع‌کرد، معادله دارای سه ریشه است و اگر در یك نقطه قطع‌کرد، دارای یك ریشه است و...

اما تابع $y=x^3+px+q$ به ازای جمیع مقادیر x اتصالی است ومشتق آن، $y'=3x^2+p$، برحسب آنکه p مثبت یا منفی باشد، علامت ثابتی خواهد داشت و یا آنکه تغییرعلامت خواهد داد.

حالت اول ـ درحالی‌که $p>0$، مشتق ریشه ندارد و بنابراین y' همیشه مثبت است و تابع همواره صعودی است. جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع چنین است:

$p>0$	x	$-\infty$		0		$+\infty$
	y'			+		
	y	$-\infty$	↗	q	↗	$+\infty$



(ش ۱)

منحنی دارای یك نقطهٔ عطف است که همان C نقطهٔ برخورد منحنی با محور yهاست . چنانکه می‌بینید در این حال منحنی فقط در یك نقطه به محور xها برمی‌خورد ، یعنی معادلهٔ $x^3+px+q=0$ ، وقتی‌که $p>0$ ، فقط یك ریشه دارد (مقدار q هرچه باشد) .

حالت دوم – در حالی که $p<0$ ، مشتق ، $y'=3x^2+p$ ، دارای دو ریشهٔ $x=\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$ می‌باشد . علامت آن $(-)$ است هرگاه اندازهٔ x بین‌این دو ریشه‌گرفته شود و $(+)$ است هرگاه اندازهٔ x در خارج فاصلهٔ این دو ریشه باشد . جدول تغییرات y چنین است :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	M ماکزیمم	↘	q	↘	m مینیمم	↗	$+\infty$

که در آن $M=-\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}+q$ ماکزیمم و $m=\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}+q$ مینیمم است .

منحنی نمایش تغییرات تابع برحسب آنکه مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر دومثبت یا هر دو منفی یا یکی مثبت و دیگری منفی یا یکی از آنها صفر باشد ، مانند منحنیهای رسم شده در صفحهٔ ۱۵۲ می‌شود :

در حالت اول (شکلهای ۲) که ماکزیمم و مینیمم هم علامتند ، منحنی نمایش تغییرات تابع محور xها را در یك نقطه قطع می‌کند . بنا براین معادلهٔ $x^3+px+q=0$ فقط دارای یك ریشه است. خصوصیت این حالت آن است که حاصلضرب ماکزیمم و مینیمم مثبت است .

$$\left(\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}+q\right)\left(\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}+q\right)>0$$

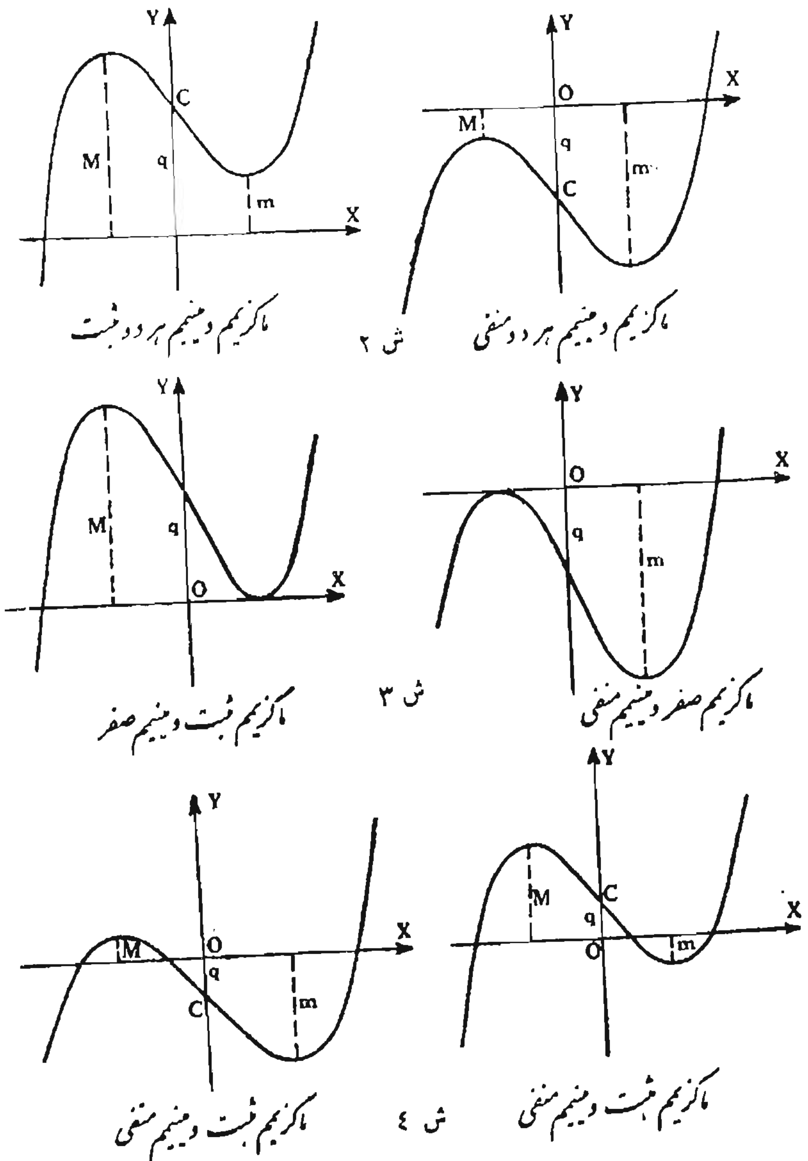
یا
$$q^2+\frac{4p^3}{27}>0$$

یا
$$4p^3+27q^2>0$$

بعکس، وقتی‌که درمعادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+px+q=0$ ، مقدار $4p^3+27q^2$ مثبت باشد ، معادله فقط دارای یك جواب است . و با درنظرگرفتن آنکه وقتی‌که $p>0$ ، $4p^3+27q^2$ حتماً مثبت خواهد بود ، می‌توان گفت :

شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ $x^3+px+q=0$ فقط یك ریشهٔ حقیقی داشته باشد، این‌است‌که $4p^3+27q^2$ مثبت باشد .

درحالت دوم (شکلهای ۳)که یکی از دومقدار ماکزیمم یا مینیمم صفر است ، منحنی در یك نقطه با محور xها مماس است و در یك



نقطهٔ دیگر محور xها را قطع می‌کند، یعنی معادلهٔ $x^3+px+q=0$، دارای یك ریشهٔ مضاعف و یك ریشهٔ ساده است. در این حال حاصل ضرب دو مقدار ماکزیمم ومینیمم صفر است، یعنی $4p^3+27q^2=0$. بعکس اگر این شرط برقرار باشد، منحنی به یکی از شکلهای (۳) خواهد بود و معادله یك ریشهٔ مضاعف و یك ریشهٔ ساده خواهد داشت. پس می‌توان گفت:

شرط لازم وکافی برای آنکه معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+px+q=0$ یك ریشهٔ مضاعف و یك ریشهٔ ساده داشته باشد، این است‌که مقدار $4p^3+27q^2$ صفر باشد.

درحالت سوم (شکلهای ۴) که ماکزیمم ومینیمم مختلف‌العلامه‌اند، منحنی نمایش تغییرات تابع، محور xها را در سه نقطه قطع می‌کند. یعنی معادلهٔ $x^3+px+q=0$، دارای سه ریشه است. خصوصیت این حالت این است‌که حاصل ضرب ماکزیمم و مینیمم منفی است، یعنی $4p^3+27q^2<0$. پس می‌توان گفت:

شرط لازم وکافی برای آنکه معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+px+q=0$ دارای سه ریشه باشد، این است‌که $4p^3+27q^2$ منفی باشد.

مقدار $4p^3+27q^2$ را **مبین** معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+px+q=0$ می‌نامند.

۳- بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم-

از آنچه گفتیم و شکلهای منحنی نمایش تغییرات تابع درجهٔ سوم، برای تعیین تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+px+q=0$، برحسب p و q، این جدول را می‌توان تشکیل داد:

به شرط :	معلوم می‌شود که :
$p>0$	معادله دارای یك ریشه است { $q>0$ ریشه منفی ، $q<0$ « مثبت } (شکلهای۱) (در این حال مبین حتماً مثبت است)
$\begin{cases} p<0 \\ 4p^3+27q^2>0 \end{cases}$	معادله دارای یك ریشه است { $q>0$ ریشه منفی ، $q<0$ « مثبت } (شکلهای ۲)
$\begin{cases} p<0 \\ 4p^3+27q^2=0 \end{cases}$	معادله دارای یك ریشهٔ مضاعف و یك ریشهٔ ساده است . { $q>0$ ساده منفی مضاعف مثبت ، $q<0$ مضاعف منفی ساده مثبت } (شکلهای ۳)
$\begin{cases} p<0 \\ 4p^3+27q^2<0 \end{cases}$	معادله دارای سه ریشه است { $q>0$ یکی منفی و دو تا مثبت ، $q<0$ « مثبت « منفی } (شکلهای ۴)

دقت کنید ! با توجه به شکلهای (۳) فوراً درمی‌یابید که مشتق تابع به‌ازای طول نقطهٔ تماس منحنی با محور xها ، صفر است (چرا؟) ، یعنی طول نقطهٔ تماس ریشهٔ مشتق تابع است . بنابراین : **وقتی‌که معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+px+q=0$ ، دارای یك ریشهٔ ساده و یك ریشهٔ مضاعف است ، یعنی مبین آن مساوی صفر است . ریشهٔ مضاعف برابر یکی از دوریشهٔ مشتق تابع $y=x^3+px+q$ می‌باشد (به‌ازای $q>0$ برابر ریشهٔ مثبت و به‌ازای $q<0$ برابر ریشهٔ منفی) .**

۴ـ تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم کامل ـ چنانکه در شمارهٔ ۱ همین فصل گفتیم ، معادلهٔ درجهٔ سوم کامل را می‌توان با انتخاب مجهول کمکی $x=X-\frac{b}{3a}$ به شکل معادلهٔ درجهٔ سوم (۲) درآورد .

واضح است که به ازای هر ریشهٔ X_0 از معادلهٔ (۲) یك ریشهٔ x_0 از معادلهٔ (۱) برابر $x_0=X_0-\frac{b}{3a}$ بدست خواهد آمد . بنابراین برای تعیین عدهٔ ریشه‌های یك معادلهٔ کامل درجهٔ سوم از طریق جبری ، ابتدا آن را به‌صورت ناقص (۲) تبدیل می‌کنیم وسپس شمارهٔ ریشه‌های معادلهٔ ناقص را بنا برآنچه گفتیم تعیین می‌کنیم . می‌توان نیز برای تعیین شمارهٔ ریشه‌های معادلهٔ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ، منحنی نمایش تغییرات این تابع را رسم‌کرد :

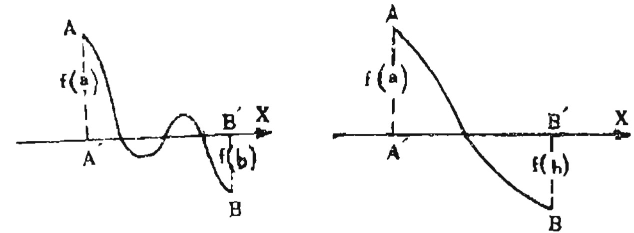
$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

و عدهٔ نقاط تلاقی آن را با محور xها معین نمود . برای این منظورکافی است که جهت تغییرات تابع و علامت ماکزیمم و مینیمم آن را معلوم‌کرد . این طریقه معمولاً سهلتر و سریعتر از طریقهٔ جبری خواهد بود .

۵ ـ حل تقریبی معادلهٔ درجهٔ سوم به‌کمك نمودار ـ بطورکلی ، ریشه‌های حقیقی هر معادلهٔ $f(x)=0$ ، طول نقاط برخورد منحنی $y=f(x)$ با محور x هاست . بنابراین اگر مثلاً بخواهیم که معادلهٔ درجهٔ سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ را به‌کمك نمودار حل کنیم ، باید منحنی $y=ax^3+bx^2+cx+d$ را رسم کنیم و طول نقاط برخورد آن را بامحور xها اندازه بگیریم . از این راه همواره می‌توان اندازهٔ تقریبی ریشه‌ای را تا ۰/۱ یا ۰/۰۱ یا ۰/۰۰۱ یا . . . تقریب بدست آورد . بدین منظور بطورکلی در موردی‌که $f(x)$ **تابع اتصالی** باشد همواره از قضیهٔ زیر استفاده می‌شود:

قضیه ـ اگر به ازای دو عدد حقیقی a و b اندازه‌های تابع

$y=f(x)$ ، یعنی $f(a)$ و $f(b)$ ، مختلف‌العلامه باشند ، معادلهٔ $f(x)=0$ اقلاً یك ریشهٔ حقیقی در داخل فاصلهٔ a و b دارد .



برهان – چون $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه‌اند ، یعنی $\overline{A'A}=f(a)$ و $\overline{B'B}=f(b)$ (شکل بالا) در دو طرف محور xها واقعند، معلوم می‌شودکه دو نقطهٔ A و B به طولهای a و b از منحنی $y=f(x)$ در طرفین محور xها واقعند . از طرف دیگر چون تابع **اتصالی** فرض شده است، منحنی نمایش تغییرات‌آن بین A و B لااقل یك دفعه (و بطورکلی یك عدهٔ فرد دفعه) محور x ها را قطع خواهدکرد.
بنابراین معادلهٔ $f(x)=0$ لااقل یك ریشهٔ حقیقی بین a و b دارد .

حال اگر بخواهیم که معادلهٔ درجهٔ سوم $f(x)=0$ را به‌کمك نمودارحل‌کنیم ، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ را (که به‌ازای جمیع مقادیر x پیوسته است و بنابراین از یك شاخهٔ پیوسته تشکیل می‌شود) رسم می‌کنیم . از این راه در **مرحلهٔ اول** ، با یك نگاه سطحی ، شمارهٔ نقاط تلاقی منحنی با محور xها یعنی شمارهٔ ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ آشکار می‌شود (برای این منظور لازم نیست که حتماً منحنی رسم شده باشد ، بلکه‌کافی است جهت تغییرات تابع $f(x)$ ، و

در صورتی‌که تابع ماکزیمم ومینیمم دارد علامت آنها را معلوم‌کنیم) و در **مرحلهٔ دوم** ، حدود ریشه وریشه‌ها معلوم می‌شود . و برای این منظور ، با استفاده از یك نمودار نسبتاً دقیق‌تر، به x مقادیر صحیحی می‌دهیم که نزدیك به اندازهٔ تخمینی ریشه باشد ، و با استفاده از قضیهٔ فوق هرریشه را بین دو عدد صحیح متوالی قرار می‌دهیم و در صورتی‌که بین دو عدد صحیح متوالی بیش از یك ریشه باشد ، فاصله‌های کوچکتری مانند $\frac{n+1}{10}$ و $\frac{n}{10}$ پیدا می‌کنیم(n عدد صحیح است)که‌درهرفاصله یك ریشه باشد . این عمل ، یعنی محصور کردن هرریشه را در یك فاصله ، **جدا کردن** ریشه‌ها می‌نامند .

مثال – برای یافتن اندازه‌های تقریبی ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^3-3x^2-9x+10=0$$

منحنی نمایش تغییرات تابع : $y=x^3-3x^2-9x+10$ را می‌کشیم :

$$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

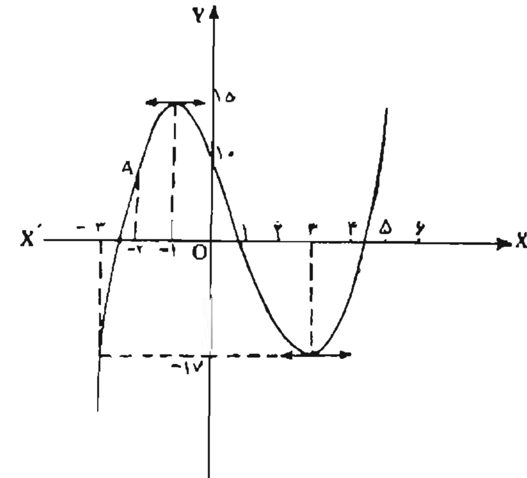
بنابراین جدول تغییرات y از این قرار است :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	15	↘	-17	↗	$+\infty$
			ماکزیمم		مینیمم		

از روی این جدول برطبق قضیهٔ فوق ، می‌بینیم‌که معادله در

هر یك از فواصل (۱− ، ∞−) و (۳ ، ۱−) و (∞+ ، ۳) اقلاً یك ریشه دارد . و چون معادلهٔ درجهٔ سوم ، سه ریشه بیشتر نمی‌تواند داشته باشد ، پس در هر فاصله یك ریشه دارد . به این ترتیب ریشه‌ها باصطلاح جدا شده است. اما برای آنکه فواصل کوچکتری بدست آوریم، با استفاده ازجدول فوق منحنی را با دقت می‌کشیم .

(برای رسم منحنی زیر، واحد روی محور yها را کوچك گرفته‌ایم



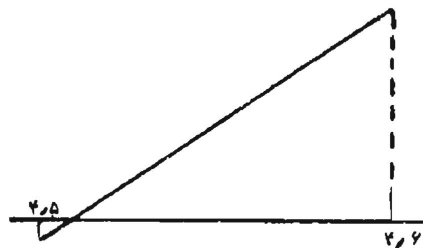
تا نقاط ماکزیمم و مینیمم از حدود صفحه خارج نشوند) . از روی منحنی حدس می‌زنیم که ریشهٔ کوچکتر از ۱− ، مابین ۲− و ۳− واقع است . وچون به‌جای x بترتیب ۲− و ۳− قرار دهیم ، می‌بینیم: $f(-۲)=۸$ و $f(-۳)=-۱۷$ یعنی حدس درست است .

همچنین یك نقطهٔ تلاقی منحنی با $x'x$ نزدیك به $x=۱$ است و چون $f(۱)=-۱$ و $f(۰)=۱۰$ ، ریشهٔ دوم در فاصلهٔ (۰ ، ۱) قرار

دارد ، بالاخره چون $f(۴)=-۱۰$ و $f(۵)=۱۵$ ، ریشهٔ سوم بین ۴ و ۵ می‌باشد .

حال فرض می‌کنیم که بخواهیم مقدار تقریبی ریشه‌ای را که بین ۴ و ۵ است بدست آوریم . اگر این ریشه را r بنامیم ، از روی شکل می‌بینیم که r نزدیك به ۴/۵ است . چون ۴/۵ را امتحان کنیم : $f(۴/۵)=-۰/۱۲۵$ که منفی است و معلوم می‌شود که $r>۴/۵$. حال ۴/۶ را هم امتحان می‌کنیم : $f(۴/۶)=۲/۴۵۶$ که مثبت است و معلوم می‌شود که $r<۴/۶$. $۴/۵<r<۴/۶$.

یعنی r با کمتر از ۰/۱ تقریب نقصانی برابر ۴/۵ است .

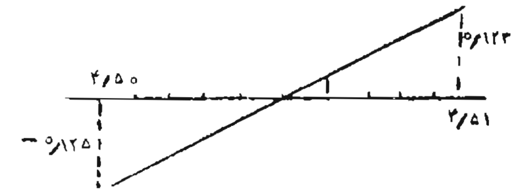


برای آنکه r را باکمتر از ۰/۰۱ تقریب پیدا کنیم ، منحنی را بین $x=۴/۵$ و $x=۴/۶$ با مقیاس بزرگتر رسم می‌کنیم از این منحنی دو نقطهٔ : $\begin{vmatrix} ۴/۵ \\ -۰/۱۲۵ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۴/۶ \\ ۲/۴۵۶ \end{vmatrix}$ معلوم است ؛ در فاصلهٔ $(\frac{۴۵}{۱۰}$ و $\frac{۴۶}{۱۰})$ ، می‌توان قوس منحنی و وتر آن را مشتبه نمود و به‌جای تعیین نقطهٔ تلاقی قوس با محور xها ، نقطهٔ تلاقی وتر راکه آسانتر تعیین می‌شود بدست آورد . از روی شکل بنظر می‌آید که نقطهٔ تلاقی وتر با محور xها بین $x=۴/۵۰$ و $x=۴/۵۱$ باشد .

چون $f(۴/۵۱)=۰/۱۲۳۵$ مثبت است ، $۴/۵۰<r<۴/۵۱$ ،

یعنی مقدار r با کمتر از ۰/۰۱ تقریب نقصانی ۴/۵۰ است .

همچنین اگر r را باکمتر از ۰/۰۰۱ تقریب بخواهیم، کافی است که منحنی را بین ۴/۵ و ۴/۵۱ بامقیاس بزرگتر رسم کنیم و آن را در این فاصله



با وتر مشتبه نماییم ، می‌بینیم که x نقطهٔ تلاقی تقریباً ۴/۵۰۵ است و چون $f(۴/۵۰۵)=-۰/۰۰۰۹۸۷<۰$ ، $r>۴/۵۰۵$ و چون $f(۴/۵۰۶)=+۰/۰۲۳۸۸$ ، $۴/۵۰۵<r<۴/۵۰۶$.

یعنی مقدار r با کمتر از ۰/۰۰۱ تقریب نقصانی برابر ۴/۵۰۵ است .

واضح است که می‌توان این عمل را همچنان ادامه داد . از این مثال طریقهٔ تعیین اندازه‌های تقریبی ریشه‌ها به وسیلهٔ **بزرگ کردن مقیاس** معلوم شد که چنین است :

مرحلهٔ اول ـ تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $f(x)=۰$ را تعیین و حدود آنها را تخمین می‌زنیم ، یعنی فواصلی تعیین می‌کنیم که در آن فاصله‌ها معادله بیش از یك ریشه نداشته‌باشد . این عمل با رسم نسبتاً دقیق منحنی نمایش $y=f(x)$ انجام می‌شود .

مرحلهٔ دوم ـ ریشه‌ها را به‌وسیلهٔ اعداد صحیح متوالی ازهم جدا می‌کنیم . یعنی هر ریشه را بین دو عدد صحیح متوالی محصور می‌کنیم.

مرحلهٔ سوم ـ اندازهٔ هر ریشه را با تقریب‌کمتر از $\frac{۱}{۱۰}$ تخمین می‌زنیم . این عمل معمولاً از روی نمودار دقیق تابع $y=f(x)$ انجام

می‌گیرد . فرض‌کنیم‌که $x_۱=\frac{p}{۱۰}$ اندازهٔ تخمینی برای ریشهٔ r باشد (p عدد درست) ، $f(x_۱)$ ومقادیری مانند $f(x_۱+\frac{۱}{۱۰})$ و $f(x_۱-\frac{۱}{۱۰})$ را حساب می‌کنیم ، یعنی $x_۱$ و مقادیر مجاور آن را به جای x در $f(x)$ قرار می‌دهیم و برحسب علامت $f(x)$ ، با در نظرگرفتن منحنی، معلوم می‌داریم‌که r محصور بین دو عدد به شکل $\frac{n}{۱۰}$ و $\frac{n+۱}{۱۰}$ است (n عدد درست است).

مرحلهٔ چهارم ـ منحنی نمایش $f(x)$ را با مقیاس بزرگتر در فاصلهٔ ($\frac{n+۱}{۱۰}$ و $\frac{n}{۱۰}$) رسم می‌کنیم ، منتهی به جای منحنی وتر آن را قرار می‌دهیم و از روی آن ، اندازهٔ تخمینی r را تا $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقریب‌بدست می‌آوریم . فرض می‌کنیم اندازهٔ تخمینی $x_۲$ باشد .

مرحلهٔ پنجم ـ همچنانکه در بارهٔ $x_۱$ گفتیم در بارهٔ $x_۲$ و مقادیر مجاور به $x_۲$ که به صورت $x_۲+\frac{۱}{۱۰۰}$ و $x_۲-\frac{۱}{۱۰۰}$ و غیره می‌باشند ، عمل می‌کنیم تا معلوم شودکه r محصور بین دوعدد به‌صورت $\frac{n_۱}{۱۰۰}$ و $\frac{n_۱+۱}{۱۰۰}$ قرار دارد . بدین ترتیب مقدار تقریبی r با کمتر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقریب بدست می‌آید .

توجه‌کنید ! الف ـ اگر یکی از ریشه‌های معادله عدد صحیح باشد . در مرحلهٔ دوم خودبخود بدست می‌آید .

ب ـ برای اینکه در مرحلهٔ پنجم به بعد به‌خوبی بتوان محل

تلاقی خط راستی راکه جانشین منحنی است با محور xها معین‌کرد ، بهتراست مقیاس محور yها را در هر مرحله، طوری انتخاب‌کردکه زاویهٔ خط راست با محور xها از 30° بزرگتر باشد .

ج ـ گاهی با وجود این احتیاط باز نمی‌توان به سبب اختلاف فاحش دو مقدار $f(x)$ ، جای دقیق نقطهٔ تقاطع خط را با $x'x$ معلوم کرد (همچنانکه در مثال عددی در نمایش منحنی در فاصلهٔ بین ۴/۵ و ۴/۶ پیش‌آمد) . باید دانست‌که در این صورت همواره می‌توان x نقطهٔ تلاقی خط با محور xها را محاسبه کرد ، چه‌کافی است با معادلهٔ خط واصل بین دونقطه را نوشت یا ساده‌تر ، از تشابه دو مثلث واقع در طرفین نقطهٔ تلاقی استفاده نمود . مثلاً در مثال عددی فوق ، x نقطهٔ تلاقی خط واصل بین دونقطه به طولهای ۴/۵ و ۴/۶ با محور xها چنین است :

$$x=4.5+\frac{125}{2581}\times 0.1=4.5+0.005=4.505$$

تمرین

۱ـ مطلوب است تعیین روابط مابین ضرایب a و b و c و d از معادلهٔ درجهٔ سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ و ریشه‌های آن . (اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشند، $x_1+x_2+x_3$ و $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ و $x_1x_2x_3$ را بر حسب a و b و c و d پیداکنید) .

۲ـ از روی تمرین فوق دستگاه زیر را حل‌کنید :

$$\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=0 \\ x+by+b^2z+b^3=0 \\ x+cy+c^2z+c^3=0 \end{cases}$$

(از یك معادلهٔ درجهٔ سوم استفاده‌کنید) .

۳ـ برحسب اندازه‌های پارامتر a در ریشه‌های معادلهٔ زیر بحث‌کنید:

$$x^3+6x^2+9x+a=0$$

۴ـ اولاً برحسب مقادیر مختلف m در تعداد ریشه‌های معادلهٔ زیر بحث‌کنید :

$$x^3+mx^2+2=0$$

ثانیاً مقدار m را چنان پیدا کنید که معادلهٔ فوق دارای ریشهٔ مضاعف باشد .

۵ـ چه رابطه‌ای بین a و b برقرار باشد تا این معادله دارای ریشهٔ مضاعف باشد : $ax^3+bx^2+2=0$

۶ـ در تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^3+3mx+2m=0$ برحسب مقادیر مختلف m بحث‌کنید .

۷ـ p و q را برحسب p' و q' بقسمی تعیین‌کنیدکه دو تابع :

$$x^3+px+q$$

$$x^3+p'x^2+q'$$

دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم باشند و درآن صورت تغییرات تابع زیر را تعیین و منحنی نمایش آن را رسم‌کنید :

$$y=x^3+px+q-q'$$

۸ـ اندازهٔ تقریبی ریشهٔ معادلهٔ $2x^3-11x^2+15x-1=0$ را که بین ۲ و ۳ قرار دارد تا $\frac{1}{10}$ تقریب حساب‌کنید .

۹ـ اندازهٔ تقریبی ریشهٔ معادلهٔ $x^3-10x^2+32x+66=0$ را که بین ۲ـ و ۱ـ قرار دارد تا $\frac{1}{100}$ تقریب حساب‌کنید .

۱۰ـ ریشهٔ معادلهٔ $x^3+x^2-10x+4=0$ را که بین ۵ و ۱ است تا یك صدم تقریب حساب‌کنید .

۱۱ـ ریشهٔ معادلهٔ $x^3-7x+7=0$ را که بین ۱ و ۲ است تا یك صدم تقریب حساب‌کنید .

۱۲ـ ریشه‌های معادلهٔ $x^3-2x^2-4x+8=0$ را پیداکنید .

۱۳ - ریشه‌های معادلهٔ $x^3+4x^2-3x-18=0$ را پیداکنید .

۱۴ - تحقیق کنیدکه هریك از توابع زیر دارای سه نقطهٔ عطفندکه بر یك استقامت قرار دارند :

الف - $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ ب - $y=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$

ج - $y=\frac{x^2}{x^2+x+2}$ د - $y=\frac{2x+1}{2x^2+1}$

فصل هفتم

توابع اولی و موارد استعمال آن در محاسبهٔ سطح و حجم

I - توابع اولیه

۱ - تعریف - اگر تابع $f(x)$ مشتق تابع $F(x)$ باشد ، تابع $F(x)$ را تابع اولی $f(x)$ می‌نامند . به عبارت دیگر ، تابع اولی یك تابع ، مانند $f(x)$ ، هر تابعی است‌که مشتقش برابر $f(x)$ باشد .

مثلاً چون $2x$ مشتق x^2 است ، x^2 تابع اولی $2x$ است .

همچنین چون $\cos x$ مشتق $\sin x$ است ، $\sin x$ تابع اولی $\cos x$ است .

از آنجا که مشتق مقدار ثابت صفر است ، اگر $F(x)$ تابع اولی $f(x)$ باشد ، هر تابع که به صورت $F(x)+C$ باشد (C مقدار ثابت) نیز تابع اولی همان $f(x)$ خواهد بود . بنابراین برای یك تابع مفروض، توابع اولیهٔ بیشمار وجود دارد که اختلاف آنها در مقدار ثابت است . چنانکه $\sin x$ و $\sin x-2$ و $\sin x+\frac{1}{2}$ و بطورکلی $\sin x+C$ همهٔ تابعهای اولی تابع $\cos x$ می‌باشند .

بسهولت می‌توان ثابت‌کردکه اگر $F(x)$ تابع اولیهٔ $f(x)$ باشد، همهٔ تابعهای اولیهٔ $f(x)$ به صورت $F(x)+C$ می‌باشندکه در آن C ثابت است . زیرا اگرگفته شودکه $\varphi(x)$ نیز تابع اولی $f(x)$ می‌باشد ، یعنی اگرداشته‌باشیم $\varphi'(x)=f(x)$ چون به فرض داریم $F'(x)=f(x)$

۱۳ـ ریشه‌های معادلهٔ $x^3+4x^2-3x-18=0$ را پیداکنید .

۱۴ـ تحقیق کنیدکه هریك از توابع زیر دارای سه نقطهٔ عطفندکه بر یك استقامت قرار دارند :

الف ـ $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ ب ـ $y=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$

ج ـ $y=\frac{x^2}{x^2+x+2}$ د ـ $y=\frac{2x+1}{2x^2+1}$

فصل هفتم

توابع اولی و موارد استعمال آن در محاسبهٔ سطح و حجم

I ـ توابع اولیه

۱ ـ تعریف ـ اگر تابع $f(x)$ مشتق تابع $F(x)$ باشد ، تابع $F(x)$ را تابع اولی $f(x)$ می‌نامند . به عبارت دیگر ، تابع اولی یك تابع ، مانند $f(x)$ ، هر تابعی است‌که مشتقش برابر $f(x)$ باشد .

مثلاً چون $2x$ مشتق x^2 است ، x^2 تابع اولی $2x$ است .

همچنین چون $\cos x$ مشتق $\sin x$ است ، $\sin x$ تابع اولی $\cos x$ است .

از آنجا که مشتق مقدار ثابت صفر است ، اگر $F(x)$ تابع اولی $f(x)$ باشد ، هر تابع که به صورت $F(x)+C$ باشد (C مقدار ثابت) نیز تابع اولی همان $f(x)$ خواهد بود . بنابراین برای یك تابع مفروض، توابع اولیهٔ بیشمار وجود دارد که اختلاف آنها در مقدار ثابت است . چنانکه $\sin x$ و $\sin x-2$ و $\sin x+\frac{1}{2}$ و بطورکلی $\sin x+C$ همهٔ تابعهای اولی تابع $\cos x$ می‌باشند .

بسهولت می‌توان ثابت‌کردکه اگر $F(x)$ تابع اولیهٔ $f(x)$ باشد، همهٔ تابعهای اولیهٔ $f(x)$ به‌صورت $F(x)+C$ می‌باشندکه در آن C ثابت است . زیرا اگرگفته شودکه $\varphi(x)$ نیز تابع اولی $f(x)$ می‌باشد ، یعنی اگرداشته‌باشیم $\varphi'(x)=f(x)$ چون به‌فرض داریم $F'(x)=f(x)$

پس : $\varphi'(x)-F'(x)=0$ و چون $\varphi'(x)-F'(x)$ ، برابر مشتق $\varphi(x)-F(x)$ است و این مشتق صفر می‌باشد، بنا براین $\varphi(x)-F(x)$ برابر عدد ثابت خواهد بود. یعنی $\varphi(x)-F(x)=C$. یا $\varphi(x)=F(x)+C$ یا به عبارت دیگر ، $\varphi(x)$ به همان صورت $F(x)+C$ است .

۲ـ **محاسبهٔ توابع اولی** ـ اگر جدولی شامل دو ستون تشکیل دهیم‌که در ستون چپ آن تابعهای مفروض و در ستون دیگر مشتق آن توابع نوشته شده باشد ، می‌توان گفت که هریك از تابعهای ستون چپ تابع اولی برای تابع نظیر خود از ستون سمت راست می‌باشد . جدول زیر را به همین ترتیب تشکیل داده‌ایم :

مشتق	تابع
px^{p-1}	$x^p \quad p\neq 0$
$a\cos ax$	$\sin ax$
$-a\sin ax$	$\cos ax$
$\dfrac{a}{\cos^2 ax}$	$tg\, ax$
$\dfrac{-a}{\sin^2 ax}$	$cotg\, ax$

و بعکس ، با درنظرگرفتن اینکه اگر $f(x)$ مشتق $F(x)$ باشد ، $F(x)+k$ ، (k ثابت) ، یکی از تابعهای اولی $f(x)$ است ، این جدول را خواهیم داشت :

تابع اولی	تابع
$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$x^n \quad (n\neq -1)$
$\dfrac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}+C$	$(ax+b)^n \quad (n\neq -1)$
$\dfrac{1}{a}\sin ax+C$	$\cos ax$
$-\dfrac{1}{a}\cos ax+C$	$\sin ax$
$\dfrac{1}{a}tg\, ax+C$	$1+tg^2 ax=\dfrac{1}{\cos^2 ax}$
$-\dfrac{1}{a}cotg\, ax+C$	$1+cotg^2 ax=\dfrac{1}{\sin^2 ax}$

از روی این جدول و به‌کمك بعضی از قضایای مربوط به مشتق توابع و فرمولهای مثلثاتی ، می‌توانیم توابع اولی تابعهایی راکه در این کلاس بدان برمی‌خوریم حساب‌کنیم . برای روشن شدن طرزعمل به‌ذکر چند مثال می‌پردازیم :

مثال ۱ ـ تابع اولی عبارت $2x^3-3x^2+\frac{1}{2}x+5$ را بدست آورید .

حل ـ می‌دانیم‌که مشتق مجموع جبری چند تابع برابر مجموع جبری مشتقهای آنهاست ؛ پس بعکس ، یکی از تابعهای اولی مجموع جبری چند تابع ، برابر مجموع تابعهای اولی آنها می‌باشد . بنابراین برای بدست‌آوردن تابع اولی عبارت فوق چنین عمل می‌کنیم :

چون یك تابع اولی x^3 برابر $\frac{1}{4}x^4$ است ، یك تابع اولی $2x^3$ می‌شود $\frac{1}{2}x^4$ ،

و چون یك تابع اولی x^2 برابر $\frac{1}{3}x^3$ است ، یك تابع اولی $-3x^2$ می‌شود $-x^3$ ،

و چون یك تابع اولی x برابر $\frac{1}{2}x^2$ است ، یك تابع اولی $\frac{1}{2}x$ می‌شود $\frac{1}{4}x^2$ ،

وچون یك تابع اولی ۵ ، برابر $5x$ است ، یك تابع اولی عبارت فوق برابر است با :

$$\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 5x$$

و از آنجا تابعهای اولی آن به صورت زیر می‌باشند :

$$\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 5x + C$$

مثال ۲– توابع اولی $\frac{1}{(3x-5)^2}$ را بدست آورید .

حل – چون این عبارت را می‌توان به صورت $(3x-5)^{-2}$ نوشت ، به موجب جدول فوق ، توابع اولیهٔ آن به صورت زیر است :

$$\frac{1}{(-2+1)\times 3}(3x-5)^{-2+1}+C=\frac{-1}{3(3x-5)}+C$$

مثال ۳– توابع اولی $\sqrt{5x+3}$ را بدست آورید .

حل – داریم : $\sqrt{5x+3} = (5x+3)^{\frac{1}{2}}$ ، پس توابع اولی آن چنین است :

$$\frac{2}{3\times 5}(5x+3)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{15}\sqrt{(5x+3)^3}+C$$

مثال ۴– توابع اولی $\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$ را بدست آورید .

حل – داریم : $\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}=(2x)^{-\frac{1}{3}}$ ، پس توابع اولی‌آن چنین است :

$$\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{4x^2}+C$$

مثال ۵– برای محاسبهٔ تابعهای اولی عبارتهایی مانند :

$$\cos^n x \quad و \quad \sin^n x \quad و \quad \sin px\cos qx$$

(n عدد درست و مثبت) قبلاً بایدآنها را بشکل مجموع جبری چند سینوس وکسینوس تبدیل‌کرد .

مثلاً اگر بخواهیم تابعهای اولی $\sin 2x\cos 3x$ را بدست آوریم ، چنین می‌نویسیم :

$$\sin 2x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)$$

که تابعهای اولی آن می‌شود :

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x+\cos x\right)+C$$

همچنین برای محاسبهٔ تابعهای اولی $\cos^2 x$ ، قبلاً آن را چنین می‌نویسیم :

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

که تابعهای اولی آن می‌شود: $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

و برای محاسبهٔ تابعهای اولی $\sin^4 x$ بترتیب چنین می‌نویسیم:

$$\sin^4 x=(\sin^2 x)^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

بنابراین یکی از تابعهای اولی آن چنین است:

$$\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$$

مثال ۶ــ برای محاسبهٔ تابعهای اولی عبارتی به‌شکل $\sin^n x\cos x$، اگر $\sin x$ را u بنامیم ($\sin x=u$) خواهیم داشت: $\cos x=u'$. پس عبارت، به شکل $u^n u'$ است و بنابراین یکی از تابعهای اولی آن چنین است:

$$\frac{1}{n+1}\sin x^{n+1} \quad \text{:یا} \quad \frac{1}{n+1}u^{n+1}$$

مثال ۷ــ مسئله ــ مطلوب است تعیین معادلهٔ یك منحنی که ضریب زاویه‌ای مماس بر آن در هر نقطه‌اش دو برابر طول آن نقطه باشد و از نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\4\end{vmatrix}$ بگذرد.

حل ــ چون ضریب زاویه‌ای مماس بر هر نقطه ازمنحنی $y=f(x)$، اندازهٔ مشتق y در ازای x همان نقطه است، بنا به فرض مسئله رابطهٔ

بین x هر نقطه وضریب زاویه‌ای مماس برمنحنی درآن نقطه چنین است:

$$y'=2x$$

این رابطه، مشتق تابع مطلوب است و اگر بخواهیم آن تابع را بدست آوریم، باید تابع اولی بگیریم‌که چنین می‌شود:

$$y=x^2+C$$

و چون این منحنی از نقطهٔ A می‌گذرد، باید مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ منحنی صدق‌کند. یعنی داشته باشیم:

$$4=1+C$$

و از آنجا، ابتدا C و بعد معادلهٔ منحنی مطلوب چنین است:

$$C=4-1=3$$

$$y=x^2+3$$

پس آن منحنی سهمی است.

تمرین

۱ــ مطلوب است تعیین تابع اولی x^2-3x+2 بقسمی‌که به ازای $x=2$ صفر شود.

۲ــ مطلوب است تابع اولی $x^2-\frac{1}{x^2}$ بقسمی‌که به‌ازای $x=1$ برابر ۲ شود.

۳ــ مشتق دو تابع u و v برحسب متغیر x بترتیب u' و v' است. اگر داشته باشیم: $\frac{u}{v}=\frac{u'}{v'}$، ثابت‌کنیدکه نسبت $\frac{u}{v}$ مقداری ثابت است.

۴ــ تابعهای اولیهٔ هریك از توابع زیر را پیداکنید:

الف ــ $y=2(x^2-x)^2$ ب ــ $y=5(3x+1)^4$

ج ــ $y=x^3-x^2+4x-1$ د ــ $y=2x(x^2-3x+1)$

ه- $y=\frac{۲}{(x+۱)^۲}$ و- $y=\frac{۲x-۱}{(x^۲-x+۵)^۲}$

ز- $y=\sqrt{x+۳}$ ح- $y=۲\sqrt[۳]{x}$

ط- $y=\sqrt[۳]{۵x-۱}+\sqrt{۲x+۱}$ ی- $y=\frac{۴}{x^۳}+\frac{۱}{۲x^۲}$

۵ - توابع اولی هریك از این تابعها را حساب‌کنید:

الف- $\cos x+۳\sin x$ ب- $\cos ۴x$

ج- $\sin ۳x$ د- $\sin x\cos x$ ه- $\cos^۳ x$

و- $\sin^۳ x$ ز- $\cos^۲ x\sin x-۱$

ح- $\sin^۲ x\cos x$ ط- $\sin ۳x\cos ۲x$

ی- $\cos x(۱+\sin ۳x)$ یا- $\sin^۲ x\cos ۳x$

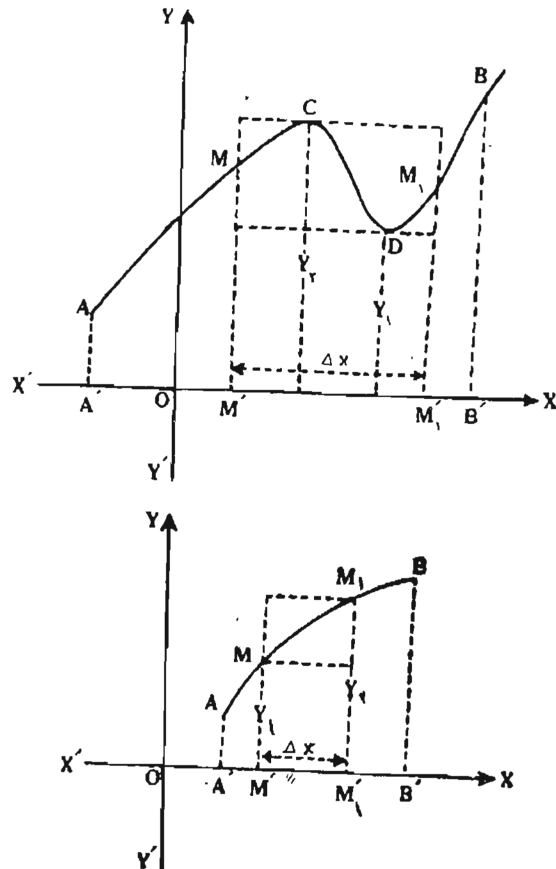
یب- $tg^۲ x$ یج- $tg^۴ y$

۶ - مطلوب است تعیین معادله و شکل یك منحنی مسطح‌که قائمهای نقطه‌های مختلفه‌اش ازمبدأ مختصات بگذرد.

II - موارد استعمال توابع اولی در محاسبهٔ مساحت

۳- فرض می‌کنیم که تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ (a و b) معین و متصل و مثبت باشد و در این فاصله به وسیلهٔ قوس AB نمایش داده شده و $A\left|\begin{matrix}\overline{OA'}=a\\ \overline{A'A}\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}\overline{OB'}=b\\ \overline{B'B}\end{matrix}\right.$ باشد. اگر $M\left|\begin{matrix}\overline{OM'}=x\\ \overline{M'M}\end{matrix}\right.$ نقطه‌ای از قوس AB باشد، می‌خواهیم مساحت سطح A'AMM'، یعنی سطح واقع بین محور xها و منحنی و دو خط A'A و M'M

را حساب‌کنیم (به شکل توجه کنید). معلوم است که اگر A را ثابت



نگاه داریم و M روی قوس AB حرکت‌کند، x تغییر می‌کند و این مساحت بستگی به تغییرات x دارد، یعنی تابعی است از x و حتی می‌توان‌گفت‌که تابعی صعودی است. ما این تابع را $S(x)$ می‌نامیم. ذیلاً ثابت می‌کنیم‌که $S(x)$ یکی از تابعهای اولیهٔ y یا $f(x)$ است. برای این منظور مشتق $S(x)$ را حساب می‌کنیم.

اگر به متغیر $x=\overline{OM'}$ نمو مثبت $\Delta x=\overline{M'M'_۱}$ را بدهیم،

تابع $S(x)$ به اندازهٔ مساحت $M'MCDM_1M'_1$ نمو پیدا می‌کند. بنابراین:

$$\Delta S = M'MCDM_1M'_1 \text{ مساحت}$$

و اگر بین x و $x+\Delta x$ حداکثر و حداقل y را بترتیب y_2 و y_1 بنامیم، ΔS از مساحت مستطیلی که قاعده‌اش Δx و ارتفاعش y_2 می‌باشد کوچکتر و از مساحت مستطیلی که قاعده‌اش Δx و ارتفاعش y_1 می‌باشد بزرگتر است (درحالت خاص ممکن است برابر آنها باشد).

$$y_1 \cdot \Delta x < \Delta S < y_2 \cdot \Delta x$$

و چون طرفین این نامساویها را بر Δx که مثبت فرض کردیم* تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$y_1 < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y_2$$

حال اگر Δx را به سمت صفر میل دهیم، ΔS هم به سمت صفر و y_1 و y_2 هر دو به سمت $\overline{M'M}$ یا y میل می‌کنند و چون $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ بین y_1 و y_2 واقع است، حد آن هم y خواهد بود. اما حد $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ مشتق $S(x)$ است:

$$S'(x) = y = f(x)$$

پس $S(x)$ یکی از توابع اولیهٔ $f(x)$ است.

بنابراین اگر فرض کنیم که $F(x)$ یکی از تابعهای اولی $f(x)$

* اگر Δx منفی باشد، ΔS هم منفی است و قدرمطلقش برابر مساحت $M'MM_1M'_1$ می‌باشد و داریم:

$$y_1|\Delta x| < |\Delta S| < y_2|\Delta x|$$

$$y_1 < \left|\frac{\Delta S}{\Delta x}\right| = \frac{\Delta S}{\Delta x} < y_2$$

باشد، چون $S(x)$ نیز یکی از تابعهای اولی $f(x)$ است، داریم: $S(x)=F(x)+C$ که درآن C مقداری است ثابت.

برای تعیین این مقدار ثابت می‌گوییم که اگر x به سمت a میل کند، مساحت به صفر نزدیك می‌شود؛ در این صورت از روی تساوی فوق خواهیم داشت:

$$S(a)=0=F(a)+C$$

یا:

$$C=-F(a)$$

و از آنجا

$$S(x)=F(x)-F(a) \qquad (1)$$

۴ـ مسئله ــ مطلوب است محاسبهٔ مساحت سطح محصور بین محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$ $(b>a)$ و منحنی نمایش تابع $y=f(x)$.

حل ــ در حقیقت این سطح همان سطح $A'AMM'$ است وقتی که M را در B، یعنی x را برابر b فرض کنیم. و چون $S(x)=F(x)-F(a)$، اگرمساحت مطلوب را به S_a^b نمایش دهیم، داریم:

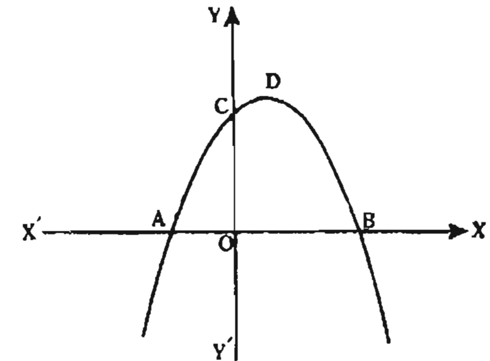
$$\boxed{S_a^b = F(b)-F(a)} \qquad (2)$$

یعنی برای محاسبهٔ این مساحت ابتدا یکی از تابعهای اولی $f(x)$ مانند $F(x)$ را بدست می‌آوریم وبعد اندازهٔ $F(x)$ را به ازای طولهای a و b $(b>a)$ حساب‌کرده $F(a)$ را از $F(b)$ تفریق می‌کنیم.

مثال ۱ــ می‌دانیم که منحنی نمایش تغییرات تابع زیر یك سهمی است:

$$x=f(x)=-x^2+x+2$$

این سهمی محور xها را در دو نقطهٔ (۰ و ۱−)A و(۰ و ۲)B ومحور yها را درنقطهٔ $C\left|\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right.$ قطع می‌کنند . می‌خواهیم مساحت شکل OCDB یا S_0^2 (مساحت سطح محصور بین محور xها و دو خط $x=0$ و $x=2$ و سهمی) را حساب کنیم.



برای این‌کار یکی از تابعهای اولی y را بدست می‌آوریم که چنین است:

$$F(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x$$

مطابق دستور (۲) : $S_0^2=F(2)-F(0)$

وچون $F(2)=-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4=\frac{10}{3}$ و $F(0)=0$ ، داریم :

$$S_0^2=\frac{10}{3}$$

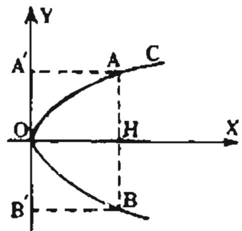
یعنی اگر واحد طول یك سانتیمتر باشد ، مساحت این سطح برابر $\frac{10}{3}$ سانتیمترمربع است .

ونیزمساحت ACDB یعنی S_{-1}^2 چنین است: $S_{-1}^2=F(2)-F(-1)$

وچون $F(-1)=\frac{-7}{6}$ ، داریم :

$$S_{-1}^2=\frac{10}{3}-\left(\frac{-7}{6}\right)=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$ واحد سطح

مثال ۲ـ محاسبهٔ مساحت سطح محصور بین یك سهمی ویك خط عمود برمحورآن .



اگر معادلهٔ سهمی را $y^2=2px$ بگیریم ، منظور محاسبهٔ مساحت سطح AOB (محصورمابین منحنی وخط $x=OH=a$) می‌باشد . داریم:

$$y=\pm\sqrt{2px}$$

علامت (+) مربوط به نیمهٔ بالایی منحنی و علامت (−) مربوط به نیمهٔ دیگر است ، پس معادلهٔ قوس OAC ، که بالای محور xهاست ، عبارت است از : $y=+\sqrt{2px}$

بنابر آنچه دیدیم ، چون می‌توان یك تابع اولی برای y یا $\sqrt{2px}$ بدست آورد ، می‌توان سطح $S_0^a=OHA$ ، یعنی سطح محصور بین محور xها و محور yها و خط $x=a$ و منحنی را حساب‌کرد و با توجه به اینکه ox محور تقارن منحنی است ، S_0^a را دوبرابرکرد تا S ، سطح مطلوب AOB بدست آید . راه عمل چنین است :

$$f(x)=\sqrt{2px}=(2px)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{2p}.x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x\sqrt{2px}$$

$$S_0^a = OHA = F(a) - F(0) = \frac{۲}{۳}\sqrt{۲pa}\cdot a$$

از آنجا :

$$S = \frac{۴}{۳}a\sqrt{۲pa}$$

$$= \frac{۴}{۳}OH \times HA = \frac{۲}{۳}OH \cdot AB$$

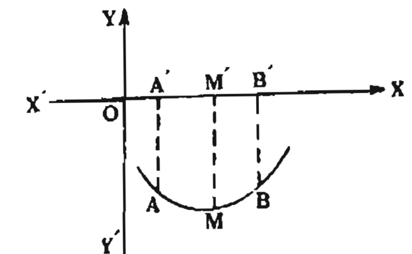
یعنی مساحت مطلوب (AOB) دو ثلث مساحت مستطیل AA'B'B است .

۵ ـ در دستورهای (۱) و (۲) فرض بر این است که در فاصلهٔ (a ، b) ، $b>a$ ، تابع $f(x)$ متصل ، معین ، مثبت و $a<x$.

حال اگر در فاصلهٔ (a ، b) تابع $y=f(x)$ متصل و معین اما منفی باشد ، چنانچه جهت مثبت محور yها را تغییر دهیم ، y در این فاصله مثبت و برابر $-f(x)$ می‌شود و با همان استدلال دو شمارهٔ قبل، با فرض آنکه یکی از تابعهای اولیهٔ $-f(x)$ را $F_1(x)$ بنامیم خواهیم داشت :

$$\text{سطح } A'AMM' = S(x) = F_1(x) - F_1(a)$$

$$\text{سطح } A'ABB' = S_a^b = F_1(b) - F_1(a)$$



ولی واضح است که اگر یکی از تابعهای اولی $f(x)$ را $F(x)$ بنامیم ، $F_1(x)$ ، یا یکی از تابعهای اولی $-f(x)$ ، را می‌توان $-F(x)$ گرفت ، پس :

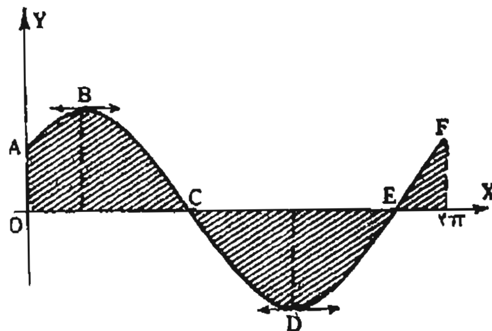
$$\text{سطح } A'ABB' = S_a^b = F_1(b) - F_1(a) = -F(b) - [-F(a)]$$
$$= -[F(b) - F(a)]$$

یعنی در حالی‌که منحنی زیر محور xها باشد ، برای محاسبهٔ سطح ، همان دستور (۲) را بکار می‌بریم و حاصل را تغییر علامت می‌دهیم .

چنانچه در فاصلهٔ (a ، b) قسمتی از منحنی در بالا و قسمتی در زیر محور xها باشد، برای محاسبهٔ مساحت سطح محصور بین منحنی و محور xها ، مساحت هریك از قسمتهای بالا و پایین را جداگانه حساب کرده حاصلها را با هم جمع می‌کنیم .

مثال ـ مساحت سطح واقع بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x+\cos x$ و محور xها و دو خط $x=0$ و $x=۲\pi$ چنین بدست می‌آید :

در فاصلهٔ (۰ ، ۲π) منحنی نامبرده محور xها را در نقاط C و E قطع می‌کند که طولهای آنها ریشه‌های معادلهٔ $\sin x+\cos x=0$



یا $tg\,x=-۱$ یعنی $\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$ می‌باشد . در فاصله‌های $(0 ، \frac{۳\pi}{۴})$ و $(\frac{۷\pi}{۴} ، ۲\pi)$ منحنی بالای محور xها ودرفاصلهٔ $(\frac{۳\pi}{۴} ، \frac{۷\pi}{۴})$ زیر آن واقع است .

اگر مساحت مطلوب (یعنی مساحت سطح هاشور زده شده) را S و هریك از سه مساحت جزء را بترتیب از چپ به راست S_1 ، S_2 و S_3 بنامیم :

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

چون یکی از تابعهای اولی $\sin x + \cos x$ چنین است :

$$F(x) = -\cos x + \sin x$$

داریم :

$$S_1 = F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F(0) = \sqrt{2} - (-1) = \sqrt{2} + 1$$

$$S_2 = -\left[F\left(\frac{7\pi}{4}\right) - F\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = -(-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$S_3 = F(2\pi) - F\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1 - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

و از آنجا:

$$S = (\sqrt{2} + 1) + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)$$
$= 4\sqrt{2}$ واحد سطح

تمرین

۱- مطلوب است محاسبهٔ سطح واقع بین محور xها ودوخط $x = -1$ و $x = 3$ و هریك از منحنیهای زیر :

الف- $y = (x-1)(x-3)$ ب - $y = -x^2 + 8x - 12$

ج- $y = x^2 - 6x + 8$ د - $y = 4x^4 + 5x^2 + 1$

۲- مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین محور xها ودوخط $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{4}$ و هریك از منحنیهای :

الف- $y = \sin 2x + 1$ ب - $y = \cos 3x - 1$

ج- $y = \sin 2x - \cos 2x$ د - $y = -\frac{1}{2}\cos^2 x$

هـ - $y = \sin^3 2x - \sin 2x$

۳- اولا ثابت کنید که منحنیهای نمایش $y = -x^2 + x + 2$ و $y = x^2 + 1$ هرکدام یك سهمی است ، و مختصات رأس هریك را تعیین و آنها را نسبت به یك دستگاه مختصات رسم کنید . ثانیاً مختصات نقاط تقاطع دو منحنی و سطح محصور بین این دو منحنی راحساب‌کنید.

۴- اگر A و B نقاطی ازمنحنی $y = 2x^3 - 2x^2 + 1$ باشندکه‌در آنجا مماس برمنحنی موازی Ox می‌باشد ، تعیین کنید: اولا مساحت سطح محصور بین قوس AB و محورهای مختصات و خط $x = \frac{2}{3}$ را. ثانیاًمساحت سطح محصور بین‌قوس و وتر AB را.

۵ـ مساحت سطح محصور بین دو منحنی $y = \frac{x^2}{4}$ و $x = \frac{y^2}{4}$ را حساب‌کنید .

۶- اولامنحنیهای نمایش‌معادلات $y^2 = 4x$ و $y = -2x^2$ رانسبت به یك دستگاه دومحور مختصات رسم کنید . ثانیاً مساحت سطح محصور بین آنهارا حساب‌کنید .

۷- اولا جدول‌ومنحنی(C) نمایش تغییرات مشتق تابع $y = \frac{4x-2}{2x+1}$ را رسم‌کنید . ثانیاً سطح محصور میان خط $y = 2x - 1$ و منحنی (C) و محورyها را حساب کنید.

۸ ـ اولا مطلوب است محاسبهٔ ضرایب a ، b و c بقسمی که رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ نقطهٔ A (۱− و ۲) و نقطهٔ تلاقیش بامحورyها به عرض۳ باشد. ثانیاً منحنی نمایش تابع $y = x^2 - 4x + 3$ را رسم کنید.

ثالثاً اگر B نقطهٔ برخورد این منحنی با محورyها باشد ، معادلهٔ خط AB را بنویسید و مساحت سطح میان منحنی و وترAB را حساب‌کنید.

۹ـ اولا ضرایب a و b را طوری حساب‌کنیدکه تابع :

$y=(a+b\cos x)\sin x$ در ازای $x=\frac{\pi}{3}$ ماکزیمم یا مینیمم و برابر $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ باشد . ثانیاً منحنی نمایش تابع $y=(1+\cos x)\sin x$ را درفاصلهٔ (۰ و ۲π) رسم‌کنید و سطح محصور بین‌این منحنی و محور طولها راحساب کنید .

۱۰ـ اولا منحنی نمایش تغییرات تابع $y=1-\sin x+\cos x$ را رسم‌کنید. ثانیاً مساحت سطح واقع مابین این منحنی و محورxها و خطهای $x=0$ و $x=\frac{3\pi}{5}$ را حساب‌کنید .

۱۱ـ اولا a وb را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع $y=a\cos 2x+b\sin x$ در نقطه‌ای به طول صفر با خط $y=x+1$ مماس باشد . ثانیاً منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\cos 2x+\sin x$ را در فاصلهٔ (۰ و ۲π) رسم کنید . ثالثاً سطح محصور بین این منحنی و محورهای مختصات را حساب‌کنید .

۱۲ـ اولامعادلهٔ $\cos 2x+\sin x-1=0$ راحل‌کنید . ثانیاً جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\cos 2x+\sin x-1$ را رسم‌کنید. ثالثاً مساحت سطح میان‌این منحنی ومحورطولها و خطهای $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$ را حساب‌کنید.

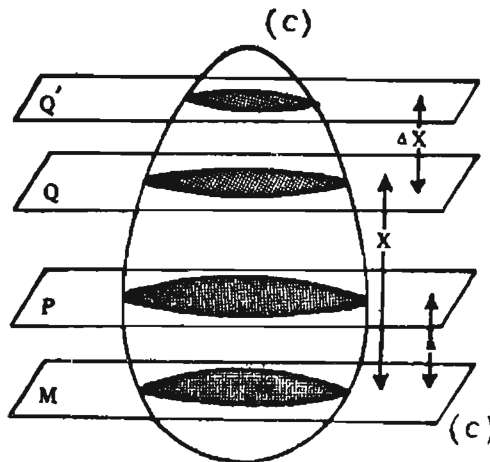
۱۳ـ اولا معادلهٔ $\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x=0$ را حل‌کنید و صورت کلی جوابهای آن را بنویسید وبخصوص جوابهایی را که بین صفر و۲πمی‌باشند،

بدست آورید . ثانیاً تغییرات تابع $y=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$ را تعیین‌کنید و منحنی (C) نمایش این تغییرات را رسم‌کنید . ثالثاً مساحت سطح محصور بین منحنی (C) و محور xها و دو خط $x=0$ و $x=\pi$ را حساب‌کنید .

۱۴ـ منحنیهای نمایش تابعهای $y=2\sin\frac{x}{2}$ و $y=|\sin x|$ را در فاصلهٔ (۰ و ۲π) رسم و مساحت سطح محصور بین آنها را حساب‌کنید .

III ـ موارد استعمال توابع اولی
در محاسبهٔ اندازهٔ حجم برخی از اجسام

۶ـ **مسئله** ـ صفحات متوازی P و Q جسم مفروض (C) را قطع می‌کنند (یا در حالت خاص برآن مماسند) . می‌خواهیم اندازهٔ آن قسمت از حجم (C) راکه محصور بین P و Q است حساب کنیم .



اگر M صفحه‌ای ثابت موازی با P و Q و در طرف دیگر P نسبت به Q باشد ، و اگر فواصل P و Q را از M بترتیب a و x بنامیم $(x>a)$ ، چنانچه P را ثابت و Q را متغیر فرض‌کنیم ، واضح است‌که اولاً مساحت سطح مقطع

صفحهٔ Q با جسم ، تابعی از x است. این تابع را $S(x)$ می‌نامیم . ثانیاً حجم منظور ، تابعی دیگر از x است که آن را $V(x)$ می‌نامیم .

بسهولت می‌توان ثابت کرد که مشتق $V(x)$ برابر $S(x)$ است .

برای این‌کار ، اگر به x نموی برابر Δx (که آن را مثبت فرض می‌کنیم) بدهیم ، یعنی صفحهٔ Q را به وضع Q' درآوریم ، $V(x)$ نموی برابر ΔV پیدا می‌کند . این نمو برابر حجم قسمتی ازجسم (C) است که محصور بین Q و Q' می‌باشد .

واضح است که اگر S_1 و S_2 بترتیب حداقل و حداکثر مساحت مقطع جسم با صفحات موازی M در فاصلهٔ $(x ، x+\Delta x)$ باشد ، ΔV ازحجم استوانه‌ای که به‌قاعدهٔ S_1 و ارتفاع Δx می‌باشد بیشتر و ازحجم استوانه‌ای که به قاعدهٔ S_2 و همان ارتفاع Δx می‌باشدکمتر است (یا در حالت خاص برابر آنهاست).

$$S_1\Delta x<\Delta V<S_2\Delta x$$

یا چون Δx مثبت می‌باشد :

$$S_1<\frac{\Delta V}{\Delta x}<S_2$$

حال اگر نمو متغیر ، یعنی Δx به سمت صفرمیل‌کند ، نمو تابع یعنی ΔV نیز به‌سمت صفر میل خواهدکرد . اما $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ دارای حد است، زیرا مقدار آن همواره محصور بین S_1 و S_2 است که هر دو به سمت $S(x)$ میل می‌کنند .

بنابراین :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=S(x)$$

$$V'(x)=S(x)$$

۷ - چون مشتق $V(x)$ برابر $S(x)$ است ، $V(x)$ یکی ازتابعهای اولی $S(x)$ می‌باشد . بنابراین اگر $G(x)$ یکی از تابعهای اولی $S(x)$ باشد ، داریم :

$$V(x)=G(x)+C$$

اما اگر Q منطبق بر P (یعنی x برابر a) شود ، V صفر خواهد بود . پس :

$$V(a)=0=G(a)+C$$

و ازآنجا :

$$C=-G(a)$$

و بنابراین :

$$V(x)=G(x)-G(a)$$

بخصوص آن قسمت ازحجم جسم که محصور بین دوصفحهٔ متوازی P و P_1 به فواصل a و b از صفحهٔ M می‌باشد $(b>a)$ چنین است :

$$V=G(b)-G(a)$$

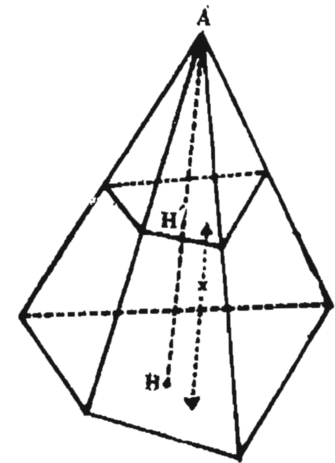
ازروی این دستورمی‌توان قسمتی از حجم یك جسم راکه محصور بین دو صفحهٔ متوازی می‌باشد حساب‌کرد ، به شرط اینکه اولاً بتوان $S(x)$ مساحت مقطع آن جسم را با یك صفحه ، برحسب x ، فاصلهٔ آن صفحه از یك صفحهٔ ثابت ، حساب‌کرد و ثانیاً بتوان تابعی اولی برای $S(x)$ بدست آورد .

تبصره ــ برای سهولت در استدلال فوق ، صفحهٔ M را طوری انتخاب‌کردیم‌که a و x و b مثبت باشند . بآسانی دیده می‌شود که وضع M و در نتیجه علامت a و x و b تأثیری در استدلال فوق ندارد .

با استفاده از آنچه‌گفته شد ، می‌توان حجم یا قسمتهایی از حجم

اجسامی از قبیل مخروط و هرم و منشور و بطورکلی شبه منشورها و نیز بعضی از اجسام دوّار را حساب‌کرد .

مثال ـ محاسبهٔ حجم هرم ـ با فرض اینکه مساحت قاعدهٔ هرم، B وارتفاعِ آن h باشد، می‌خواهیم حجم آن را حساب کنیم .



هرم را با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ B قطع می‌کنیم . فاصلهٔ آن صفحه را از قاعده x ، و مساحت مقطع را S می‌نامیم. اولاً می‌توانیم S را برحسب x حساب کنیم ، زیرا می‌دانیم که هرگاه هرمی را با صفحه‌ای به موازات قاعده قطع‌کنیم، نسبت مساحت مقطع به مساحت قاعده برابر نسبت مربعهای فواصل مقطع وقاعده از رأس می‌باشد ، پس:

$$\frac{S}{B}=\frac{AH'^2}{AH^2}=\frac{(h-x)^2}{h^2}$$

و از آنجا :

$$S(x)=\frac{B}{h^2}(h-x)^2$$

ثانیاً می‌توان از $S(x)$ تابع اولی گرفت ، چنانچه آن را به $G(x)$ بنمایانیم ، خواهیم داشت :

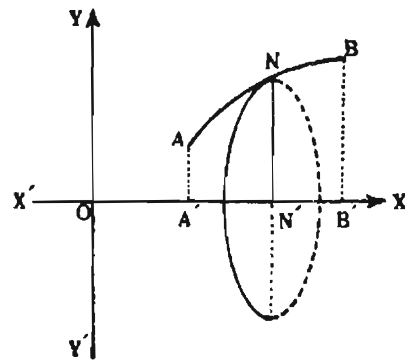
$$G(x)=-\frac{B}{3h^2}(h-x)^3$$

از این رو حجم هرم یا V چنین است :

$$V=G(h)-G(0)=0-\left(-\frac{B}{3h^2}\times h^3\right)=\frac{B\cdot h}{3}$$

تمرین ـ اندازهٔ حجم هرم ناقص شکل صفحهٔ قبل را برحسب B و x و h حساب‌کنید و از روی آن دستور حجم هرم ناقص را برحسب مساحتهای قاعده‌ها و ارتفاع آن بدست‌آورید .

۸ ـ محاسبهٔ حجم بعضی از اجسام دوّار ـ فرض می‌کنیم که $y=f(x)$ در فاصلهٔ $(a \text{ ، } b)$ معین و متصل باشد . می‌خواهیم اندازهٔ حجم جسم دوّار حادث از دوران سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور x ها وخطوط $x=a$ و $x=b$ درحول محور xها راحساب‌کنیم.



اگرصفحهٔ ثابت M شمارهٔ ۶ را صفحهٔ ماربر O و عمود برمحور x ها بگیریم ، مقطع جسم دوّار حادث ازدوران ، باهر صفحهٔ موازی M دایره است و سطح آن را برحسب x می‌توان حساب کرد . بخصوص مساحت سطح مقطعی که به‌فاصلهٔ x از O رسم شده برابر πy^2 یا $\pi[f(x)]^2$ می‌باشد :

$$S(x)=\pi y^2=\pi[f(x)]^2$$

پس اگر $G(x)$ یکی از تابعهای اولی $S(x)$ ، یا πy^2 باشد ، اندازهٔ حجم منظور همان : $G(b)-G(a)$ می‌باشد .

مثال ـ اندازهٔ حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی

$y=\sin x$ و خطهای $x=0$ و $x=\pi$ درحول محور xها را بیابید.

چون $y=\sin x$ ، برطبق دستور فوق داریم:

$$\pi y^2=\pi \sin^2 x$$

حال باید از $\pi \sin^2 x$ تابع اولی بگیریم. همانطورکه می‌دانید آن را به صورت:

$$\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$$

می‌نویسیم وتابع اولی‌یعنی $G(x)$ چنین می‌شود:

$$G(x)=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

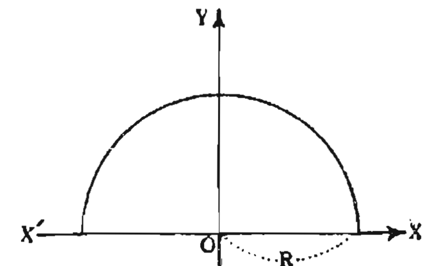
و حجم مطلوب چنین بدست می‌آید:

$$V=G(\pi)-G(0)$$

$$=\frac{\pi}{2}[(\pi-0)-(0-0)]=\frac{\pi^2}{2}$$

مثال ۳ـ حجم کره ـ

حجم کره را می‌توان از دوران سطح یك نیمدایره در حول قطر خود بدست آورد.



قطر مزبور را منطبق بر محور xها و مرکز نیمدایره را مبدأ

مختصات می‌گیریم وشعاع دایره را R می‌نامیم.

بافرض اینکه نیمدایره بالای محور xها باشد، معادله‌اش چنین است (چرا؟):

$$y=+\sqrt{R^2-x^2}$$

پس:

$$\pi y^2=\pi(R^2-x^2)$$

و از آنجا:

$$G(x)=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)$$

و محاسبهٔ حجم‌کره چنین است:

$$V=G(R)-G(-R)=\pi\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3$$

تمرین

۱ـ حساب‌کنید اندازهٔ حجمی راکه از دوران سطح محصور بین‌هریك از منحنیهای زیر وخطهای $x=2$ و $x=1$ ، در حول محور xهاحاصل می‌شود:

الف ـ $y=x^2-3x$

ب ـ $y=x^2-4x+3$

ج ـ $y=\sqrt{2+x}$

۲ـ مطلوب است اندازهٔ حجم حادث ازدوران سطح محصور بین‌هریك از منحنیهای زیر وخطهای $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ ، در حول محور xها

الف ـ $y = tg\,x$

ب ـ $y = \cos x + 1$

ج ـ $y = \sin^2 x - \cos x$

۳ـ سطح محصور مابین سهمی $y^2 = 1 - 2x$ و محورyها را درحول محور xها دوران می‌دهیم ؛ اندازهٔ حجم حاصل رابدست آورید .

۴ـ مطلوب است محاسبهٔ حجم حادث از دوران یك بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ درحول یکی از محورهای خود.

۵ـ اولا منحنی‌نمایش $y=\cos x$ را درفاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$ رسم‌کنید.

ثانیاً مساحت سطح واقع بین این منحنی و محور xها را حساب‌کنید .

ثالثاً اندازهٔ حجم حادث از دوران این سطح در حول محور xها را بدست آورید .

۶ـ اولاً سهمی $y^2=2x$ و خط $y=x$ را رسم‌کنید . ثانیاً سطح محصور بین سهمی وخط را در حول محور xها دوران می‌دهیم ؛ اندازهٔ‌حجم حاصل را حساب کنید .

۷ـ اولاً مطلوب‌است تعیین‌مکان هندسی $M \left| \begin{array}{l} x = tg\,\alpha \\ y = \frac{1}{\cos\alpha} \end{array} \right.$ و رسم آن مکان .

ثانیاً حساب‌کنید مختصات نقاط تقاطع خط Δ به معادلهٔ :

$y=(\sqrt{2}-1)x+1$ را با هذلولی (H) به معادلهٔ $y^2-x^2=1$.

ثالثاً حساب‌کنید اندازهٔ حجمی را که از دوران سطح محصور مابین (H) و Δ درحول محور xها حادث می‌شود .

۸ـ اولاً a را در تابع $y = a\sin x - \cos x$ طوری تعیین‌کنید که اندازهٔ حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی نمایش‌آن و دوخط

$x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ در حول محور xها، برابر $\frac{\pi}{4}(\pi-2)$ باشد . ثانیاً منحنی $y=\sin x-\cos x$ را درفاصلهٔ $(0 \text{ ، } 2\pi)$ رسم‌کنید و مساحت سطح محصور بین‌آن ومحور yها و خط $y=-\sqrt{2}$ راحساب‌کنید.

۹ـ هرمی به‌قاعدهٔ B وارتفاع h را ، با صفحه‌ای به موازات قاعده وبه فاصلهٔ $x<h$ از رأس ، قطع می‌کنیم . حجم هرم‌کوچك را برحسب x حساب‌کنید .

۱۰ـ تحقیق‌کنید که اندازهٔ حجم عرقچینی به ارتفاع h از کرهٔ به شعاع R برابراست با $\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$.

۱۱ـ نیمکره‌ای به شعاع R را با صفحه‌ای موازی قاعده و به فاصلهٔ d از قاعده قطع می‌کنیم . مطلوب‌است تعیین نسبت $\frac{d}{R}$ برای آنکه دو قطعهٔ کروی حادث دارای یك حجم باشند .

تمرینهای ترکیبی

۱ـ اولاً در تابع $y=x^3+px^2+qx+r$ ضرایب p و q و r را بقسمی تعیین کنید که y به ازای $x=-1$ صفر و بازای $x=-2$ ماکزیمم یا مینیمم و برابر ۱ باشد . ثانیاً معادلهٔ $y=0$ را حل کنید . ثالثاً جدول و منحنی تغییرات تابع $y=(x+1)(x^2+3x+1)$ دارسم کنید وبافرض‌آنکه A و B نقاط منحنی به طولهای ۲− و ۱− باشند ، مساحت سطح محصور بین قوس AB و وترAB را حساب‌کنید .

۲ـ اولاً a و b را بقسمی تعیین‌کنید که خط $y=x-5$ مجانب منحنی نمایش تغییرات $y=\frac{ax^2+bx}{x+2}$ باشد . ثانیاً تغییرات تابع $y=\frac{x^2-3x}{x+2}$ را معین‌کنید و منحنی (C) نمایش‌آنرا رسم‌کنید.

الف ـ $y = tg\,x$

ب ـ $y = \cos x + 1$

ج ـ $y = \sin^2 x - \cos x$

۳ـ سطح محصور مابین سهمی $y^2 = 1 - 2x$ و محورyها را درحول محور xها دوران می‌دهیم ؛ اندازهٔ حجم حاصل رابدست آورید .

۴ـ مطلوب است محاسبهٔ حجم حادث از دوران یك بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ درحول یکی از محورهای خود.

۵ـ اولا منحنی‌نمایش $y=\cos x$ را درفاصلهٔ ($\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$) رسم‌کنید.

ثانیاً مساحت سطح واقع بین این منحنی و محور xها را حساب‌کنید . ثالثاً اندازهٔ حجم حادث از دوران این سطح در حول محور xها را بدست آورید .

۶ـ اولاً سهمی $y^2=2x$ و خط $y=x$ را رسم‌کنید . ثانیاً سطح محصور بین سهمی وخط را در حول محور xها دوران می‌دهیم ؛ اندازهٔ‌حجم حاصل را حساب کنید .

۷ـ اولاً مطلوب‌است تعیین‌مکان هندسی $M\left|\begin{array}{l} x = tg\alpha \\ y = \frac{1}{\cos\alpha}\end{array}\right.$ و رسم آن مکان .

ثانیاً حساب‌کنید مختصات نقاط تقاطع خط Δ به معادلهٔ : $y=(\sqrt{2}-1)x+1$ را با هذلولی (H) به معادلهٔ $y^2-x^2=1$.

ثالثاً حساب‌کنید اندازهٔ حجمی را که از دوران سطح محصور مابین (H) و Δ درحول محور xها حادث می‌شود .

۸ـ اولاً a را در تابع $y=a\sin x-\cos x$ طوری تعیین‌کنید که اندازهٔ حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی نمایش‌آن و دوخط

$x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ در حول محور xها، برابر $\frac{\pi}{4}(\pi-2)$ باشد . ثانیاً منحنی $y=\sin x-\cos x$ را درفاصلهٔ $(2\pi ، 0)$ رسم‌کنید و مساحت سطح محصور بین‌آن ومحور yها و خط $y=-\sqrt{2}$ راحساب‌کنید.

۹ـ هرمی به‌قاعدهٔ B وارتفاع h را ، با صفحه‌ای به موازات قاعده وبه فاصلهٔ $x<h$ از رأس ، قطع می‌کنیم . حجم هرم‌کوچك را برحسب x حساب‌کنید .

۱۰ـ تحقیق‌کنید که اندازهٔ حجم عرقچینی به ارتفاع h از کرهٔ به شعاع R برابراست با $\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$.

۱۱ـ نیمکره‌ای به شعاع R را با صفحه‌ای موازی قاعده و به فاصلهٔ d از قاعده قطع می‌کنیم . مطلوب‌است تعیین نسبت $\frac{d}{R}$ برای آنکه دو قطعهٔ کروی حادث دارای یك حجم باشند .

تمرینهای ترکیبی

۱ـ اولاً در تابع $y=x^3+px^2+qx+r$ ضرایب p و q و r را بقسمی تعیین کنید که y به ازای $x=-1$ صفر و به‌ازای $x=-2$ ماکزیمم یا مینیمم و برابر ۱ باشد . ثانیاً معادلهٔ $y=0$ را حل کنید . ثالثاً جدول و منحنی تغییرات تابع $y=(x+1)(x^2+3x+1)$ دارسم کنید وبافرض‌آنکه A و B نقاط منحنی به طولهای ۲− و ۱− باشند ، مساحت سطح محصور بین قوس AB و وترAB را حساب‌کنید .

۲ـ اولاً a و b را بقسمی تعیین‌کنید که خط $y=x-5$ مجانب منحنی نمایش تغییرات $y=\frac{ax^2+bx}{x+2}$ باشد . ثانیاً تغییرات تابع $y=\frac{x^2-3x}{x+2}$ را معین‌کنید و منحنی (C) نمایش‌آنرا رسم‌کنید.

ثالثاً از نقطهٔ A به‌طول ۳ واقع برمنحنی (C) خط D_1 راباضریب زاویه‌ای m وخط D_2 راعمود بر D_1 مرور می‌دهیم تا منحنی (C) را در نقاط M_1 و M_2 قطع‌کنند. مختصات نقطهٔ P، وسط M_1M_2، را برحسب $m-\frac{1}{m}=k$ حساب کنید و معادلهٔ مکان هندسی P را وقتی‌که k تغییر می‌کند بدست‌آورده وآن را رسم‌کنید.

۳- اولاً درتابع $y=ax+b+\frac{1}{x}$ مقادیر a و b را بقسمی تعیین کنیدکه منحنی نمایش‌تغییرات‌آن با محورxها مماس و نقطهٔ $O_1\left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن‌آن باشد. ثانیاً جدول ومنحنی‌نمایش تغییرات تابع $y=x-2+\frac{1}{x}$ را رسم‌کنید. ثالثاً در وجود نقاط تلاقی منحنی فوق با خط $y=m$ برحسب مقادیر پارامتر m بحث‌کنید؛ واگر خط، منحنی را در دونقطهٔ M_1 و M_2 قطع‌کند، مکان هندسی نقطهٔ وسط خط M_1M_2 را بدست‌آورید. رابعاً پیدا کنید مکان هندسی نقاطی راکه از آنها می‌توان دومماس متعامد بر منحنی فوق رسم‌کرد.

۴- نیمدایره‌ای به قطر $AB=2R$ مفروض است و C نقطه‌ای است متغیر از این نیمدایره. مطلوب است محاسبهٔ مجموع‌احجام حادث ازدوران قطعات ACMA و BCNB (M روی قوس AC و N روی قوس CB است) حول قطر AB؛ و به فرض $R=2$ منحنی نمایش تغییرات‌این‌حجم را رسم‌کنید.

۵- تابع $y=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}$ که در آن a و b مقادیر ثابتند، مفروض است. به‌فرض آنکه y' و y'' مشتق اول و دوم این تابع باشند،

تحقیق‌کنیدکه اندازهٔ عبارت $\frac{2y'^2-yy''}{y^3}$ ثابت است.

۶- مقدار h را بقسمی تعیین‌کنید که‌کسر $\frac{x^2-hx+1}{x^2+x+1}$ محصور بین ۳- و ۳+ باشد و به ازای $h=1$ منحنی نمایش تغییرات آن‌کسر را رسم‌کنید.

۷- اولاً منحنی نمایش تغییرات این تابع را رسم‌کنید:

$$y=2(2x+1)+3\sqrt{-x^2-x+6}$$

ثانیاً به‌ازای چه مقادیر x نامعادلهٔ زیرمحقق است؟

$$2(2x+1)>-3\sqrt{-x^2-x+6}$$

۸- دو محور عمود برهم $x'ox$ و $y'oy$ مفروضند. روی ox بترتیب دو نقطهٔ A و B به طولهای $\frac{1}{3}$ و ۳ و روی oy نقطهٔ متغیرM به‌عرض y را اختیارمی‌کنیم. اولاً $tg\widehat{AMB}$ را برحسب y حساب کنید. ثانیاً وقتی که y تغییر می‌کند، تغییرات $tg\widehat{AMB}$ را معین کرده منحنی آن را رسم کنید و تحقیق‌کنید که به ازای همهٔ مقادیر y منحنی تغییرات فوق متعلق‌به $tg\widehat{AMB}$ است.

۹- تابع $y=\frac{x^3+x}{2x+1}$ مفروض است. اولاً تحقیق کنید که منحنی تابع مفروض به‌ازای $x=-1$ دارای مینیمم است ومنحنی نمایش تغییرات آن را رسم‌کنید. ثانیاً به ازای چه‌مقدار صحیح و مثبت x تابع y عدد صحیح خواهد بود؟

۱۰- ربع دایرهٔ AOB به‌شعاع $OA=OB=R$ و نقطهٔ متغیر M برروی‌آن مفروض است. نقاط P و Q تصاویرM برروی OB و OA می‌باشند. برحسب جای نقطهٔ M مطلوب است اولاً محاسبهٔ طول MP و ثانیاً حجم حادث از دوران ذوزنقهٔ OPMA حول OA. منحنی‌تغییرات این حجم را به‌ازای $R=1$ رسم‌کنید.

۱۱- ثابت‌کنیدکه معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1$ بر حسب مجهول λ همواره دارای دو ریشه‌است (هرچه باشد x ، y ، a و b).

۱۲- منحنی نمایش $y=x^{\frac{3}{2}}$ را رسم‌کنید وازیك نقطهٔ M درصفحهٔ محورهای مختصات ، مماسهایی براین منحنی بکشید و در تعداد جوابها بر حسب وضع نقطهٔ M بحث‌کنید .

۱۳- از روی تغییرات $y=\frac{x-\beta}{\alpha-x}$ پیداکنیدشرایطی راکه باید a ، b و c داشته باشند تاآنکه x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ به وضع $\alpha<x'<x''<\beta$ باشد.

(راهنمایی : هنگامی‌که x بین α و β باشد y مثبت است) .

۱۴- λ راچنان انتخاب‌کنیدکه‌ماکزیمم تابع $y=x^3-(\lambda-1)x^2+2\lambda$ دو برابر مینیمم آن باشد.

۱۵- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-x}{x^2+1}$ رارسم‌کنید. خط غیرمشخصی‌که ازمبدأ مختصات رسم می‌شود منحنی را در دو نقطهٔ دیگرقطع می‌کند . آیا می‌شود این دو نقطه قرینهٔ یکدیگر نسبت به مبدأ مختصات باشند ؟ خط را قسمی انتخاب‌کنید که این دو نقطه و مبدأ مختصات و نقطهٔ تلاقی‌آن بامجانب منحنی یك دستگاه توافقی تشکیل دهند.

۱۶- تابع $y=\frac{mx^2-2x+\lambda}{x^2-mx+m}$ مفروض است . در ازای هر مقدار y دو مقدار x_1 و x_2 بدست می‌آید . λ را چنان انتخاب کنید که x_1x_2 به مقدار y بستگی نداشته باشد. سپس درشکلهای مختلف منحنی‌نمایش تابع برحسب مقادیر مختلف m بحث‌کنید (بدون حساب‌کردن) . تحقیق کنیدکه ریشه‌های مشتق قرینهٔ یکدیگرند .

۱۷- تابع $y=\frac{x^2-mx+m}{x^2-x+1}$ مفروض است . ثابت کنیدکه بین ماکزیمم و مینیمم این تابع رابطهٔ مستقلی از m وجود دارد و m را قسمی انتخاب کنید که ماکزیمم و مینیمم قرینهٔ یکدیگر باشند و به‌ازای این مقدار m منحنی نمایش‌آن را رسم کنید .

۱۸- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(x-2)^2}{x^2(x-1)}$ را رسم‌کنید و در معادلهٔ $y=m$ برحسب پارامتر m بحث‌کنید.

۱۹- اولاً منحنی‌نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^3-9x}{x^2-1}$ را رسم کنید و از آن رو ثابت کنیدکه معادلهٔ $x^3-9x-mx^2+m=0$ دارای سه‌ریشه است (هرچه باشد مقدار m) . ثانیاً m را چنان انتخاب کنید که یکی از ریشه‌های معادله برابر a باشد و دوریشهٔ دیگرآن b و c را حساب‌کنید.

۲۰- تابع $y=\frac{x}{2x^2-5x+2}$ مفروض است . اولاً تغییرات تابع را معین‌کرده و منحنی (C) نمایش آن را با مماس بر این منحنی در مبدأ مختصات رسم‌کنید . ثانیاً اگر M_1 و M_2 نقطه‌هایی به عرض m از C ، و P_1 و P_2 تصویرهای آنها روی ox باشند ، مختصات مرکز مستطیل $M_1M_2P_2P_1$ را حساب کنید . ثالثاً ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مستطیل فوق همواره بریك دایرهٔ ثابت عمود است .

۲۱- اولاً منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{1}{x^2+x-2}$ را رسم‌کنید و از نقطهٔ A (۰ و ۱) مماسی برمنحنی (c) رسم‌کنید و نقطه‌های برخورد این مماس را با منحنی بدست‌آورید. ثانیاً این‌منحنیهارا در ازای مقادیرمختلف a رسم‌کنید : $y=\frac{1}{a(x^2+x+1)-3}$ و نقطه‌های برخوردآنها را با خطی به شیب m که از A می‌گذرد از روی شکل پیدا کرده بحث‌کنید .

۲۲ـ اولاً عدد α را قسمی انتخاب کنید که تفاضل میان ماکزیمم و مینیمم منحنی $y=\frac{-x^2+3x+\alpha}{x-4}$ برابر ۸ باشد. در این صورت منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید. ثانیاً مبدأ مختصات را به مرکز تقارن منحنی تابع فوق منتقل کنید و معادلهٔ این منحنی را در دستگاه جدید بنویسید. دراین‌حال در تعداد نقاط تلاقی خط $y=m$ با منحنی بحث کنید و ازروی شکل طولهای نقاط تلاقی را با اعداد ۱− و ۲ مقایسه کنید.

۲۳ـ تغییرات توابع $\frac{x^3-2x^2y-xy^2+2y^3}{x^2+y^2}$ و $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ را درصورتی‌که x و y بقسمی تغییر کنندکه $x+y$ برابر عدد ثابتی مانند a باشد تعیین کنید.

همچنین تغییرات $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ رانیزهنگامی‌که x و y بقسمی تغییر کنند که حاصل‌ضرب xy برابر عدد ثابتی مانند a باشد، تعیین کنید.

۲۴ـ تابع $y=\frac{x^3-10x^2}{1-x}$ مفروض است. اولاً منحنی (c) نمایش تغییرات تابع y را رسم کنید. ثانیاً از نقطه‌ای به طول ۱۰ از این منحنی خطی با ضریب زاویه‌ای m رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این خط را با منحنی (c) معین کرده بحث کنید. نقاطی از منحنی (c) را بدست آورید که مختصات آنها عددهای درست باشند.

۲۵ـ معادلهٔ $x=t+\sqrt{x^2+2(t+1)x+4t}$ مفروض است. اولاً معادلهٔ مفروض را برحسب مجهول x حل کنید و معین کنید بچه شرط معادلهٔ حاصل دارای جواب است؟ ثانیاً منحنی نمایش تغییرات تابع x از متغیر t را رسم کنید.

۲۶ـ دایره‌ای به شعاع r و به مرکز C و مماس بر خط D در نقطهٔ O مفروض است. از نقطهٔ B واقع بر خط OC دو مماس بردایره رسم

می‌کنیم تا خط D را در نقاط A و A' قطع کنند. به فرض آنکه $OA=x$ و $\widehat{OAC}=\alpha$ باشد، اولاً مقادیر OA، OB و AB را برحسب x،α،r حساب کنید. ثانیاً ثابت کنیدکه $AB=\left|\frac{x(x^2+r^2)}{x^2-r^2}\right|$. ثالثاً جدول تغییرات ومنحنی نمایش تغییرات y محیط مثلث ABA' را وقتی‌که x تغییرمی‌کند رسم کنید؛ ومثلث را درحالتی‌که y مینیمم است تعیین کنید.

۲۷ـ تابع $y=\frac{x^2+2ax+1}{x^2+2bx+1}$ مفروض است.

اولاً چه رابطه‌ای بین دو پارامتر a و b باید برقرار باشد تا آنکه مقادیر ماکزیمم ومینیمم تابع فوق دوعدد قرینه‌باشند؟

ثانیاً با این شرط مقادیر ماکزیمم و مینیمم را به ازای $a=5$ پیدا کنید ومنحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید.

۲۸ـ اولاً منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-4}{x^2-1}$ را رسم کنید. ثانیاً مختصات نقاط تقاطع خط $3x+y-4=0$ را با منحنی بدست آورید. ثالثاً اگر خط فوق منحنی را بترتیب در نقاط A، B و C قطع کند، مطلوب است تعیین مختصات نقطهٔ D مزدوج توافقی B نسبت به دو نقطهٔ A و C.

۲۹ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ به ضلع ۱ حول AB دوران می‌کند. از نقطهٔ D روی ارتفاع AB به فاصلهٔ $AD=x$ صفحه‌ای موازی قاعده رسم می‌کنیم، مطلوب است محاسبهٔ x بقسمی‌که نسبت سطح دایرهٔ مقطع به سطح کره به قطر AD مساوی k باشد. برحسب k بحث کنید. ثانیاً منحنی تغییرات k را رسم کنید.

۳۰ـ تابع $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ مفروض است. اولاً منحنی تغییرات آن را رسم کنید. ثانیاً ثابت کنیدکه شرط لازم وکافی برای آنکه سه نقطه از منحنی

با طولهای x_1 ، x_2 و x_3 بریک خط راست واقع شوند این است که : $x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3=0$ باشد ثالثاً از نقطهٔ A به طول a واقع برمنحنی می‌توان دو مماس غیر از مماسی‌که در A رسم می‌شود برمنحنی‌رسم کرد. ثابت‌کنیدکه طولهای نقاط تماس ریشه‌های معادلهٔ $x^2+\frac{2}{a}x+1=0$ است . اگرنقاط تماس را M و N بنامیم ، مختصات نقاط تلاقی خط MN را با منحنی فوق بدست آورید و مکان هندسی وسط MN را پیداکنید .

۳۱ـ معادلهٔ $y^2-2xy-3x^2-9=0$ مفروض است. اولاً y را مجهول و x را پارامتر بگیرید و در وجود و علامت ریشه‌ها برحسب x بحث‌کنید . ثانیاً y را برحسب x پیداکنید و دوتابع y را برحسب x رسم کنید و بحث قسمت اول را از آن نتیجه بگیرید . ثالثاً اگر خطی موازی محورyها منحنی را در دو نقطهٔ M_1 و M_2 قطع‌کند ، مطلوب است مکان هندسی وسط M_1M_2 .

۳۲ـ نیمدایره‌ای به قطر $AB=2R$ و به مرکز O و وتر $A'B'$ به فاصلهٔ x از AB مفروض‌است. مماسهای مرسوم از A' و B' برنیمدایره یکدیگر را در نقطهٔ S قطع می‌کنند . مماسی موازی $A'B'$ بر نیمدایره رسم می‌کنیم تا دومماس SA' و SB' را در نقاط C و D قطع‌کند. مطلوب است : اولاً محاسبهٔ V_1 حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $SA'B'$ حول SO.

ثانیاً محاسبهٔ حجم حادث ازدوران ذوزنقهٔ $A'B'DC$ حول SO.

ثالثاًمنحنی تغییرات $\frac{3V_1}{\pi}$ رابه‌ازای $R=2$ رسم‌کنید.

۳۳ ـ تابع $y=x^3-1-m(x-1)$ که در آن m پارامتری می‌باشد مفروض است . اولاً به‌ازای مقادیرمختلف m درشکل منحنی‌نمایش تابع فوق بحث‌کنید و مقدار m را چنان پیداکنید که منحنی بر محور xها مماس شود . ثانیاً در ازای این مقادیر m منحنی نمایش تغییرات آن را

رسم‌کنید . ثالثاً به‌ازای $m=3$ مقدار عددی سطح محصور بین منحنی‌تابع فوق و محور xها را با تقریبی کمتراز ۰/۱ پیداکنید.

۳۴ـ تابع $y=\frac{-x^2+4x+5}{2}$ مفروض است .

اولاً منحنی نمایش تغییرات‌آن را رسم‌کنید . ثانیاً دو نقطهٔ A و A' روی منحنی می‌توان یافت بقسمی‌که عرضهای آنها ۴ باشد ، مختصات نقاط A' و A را حساب‌کنید و سطح مثلث OAA' را بدست‌آورید . ثالثاً اگر M' وM'' نقاط تقاطع خط $y=h$ با منحنی مفروض باشد ، مطلوب است محاسبهٔ مربع(توان۲) سطح مثلث $S=OM'M''$ برحسب h وتعیین منحنی نمایش تغییرات‌آن برحسب متغیرh. رابعاً تحقیق کنیدکه از هر نقطهٔ منحنی تغییرات $S^2=f(h)$ دو مماس می‌توان بر منحنی رسم کرد . مطلوب است تعیین نقطه‌ای ازمنحنی‌که مماسهای مرسوم برهم منطبق شوند.

۳۵ـ روی Oy ازضلع زاویهٔ $xOy=\alpha$ ویك طرف نقطهٔ O دوطول $OA=a$ و $OB=b$ $(b>a)$ و نقطهٔ متغیر M را روی Ox بقسمی‌که $OM=x$ باشد اختیار می‌کنیم . اولاً مطلوب است محاسبهٔ x بقسمی که $\frac{MA}{MB}=m$ باشد (m مقداری است معلوم) . برحسب m بحث‌کنید.

ثانیاً اگر $OM'=x'$ و $OM''=x''$ مقادیری از x باشندکه‌نسبت $\frac{MA}{MB}$ به ازای‌آنها ماکزیمم ومینیمم باشد ، مطلوب است محاسبهٔ $x'x''$ و $x'+x''$ برحسب a ، b و α . ثالثاً منحنی تغییرات m را برحسب x درحالتی‌که $b=2a$ و $\alpha=\frac{\pi}{4}$ باشد رسم‌کنید.

۳۶ـ اولاً تغییرات $y=\frac{(x-2)^2}{x^2(x-1)}$ را رسم‌کنید . ثانیاً درتعداد ریشه‌های معادلهٔ $ax^2(x-1)-(x-2)^2=0$ بـر حسب مقادیر a بحث‌کنید.

۳۷- معادلهٔ $\frac{u}{uy-x}+\frac{۱}{y-ux}-۱=۰$ که درآن u مجهول وx وy مختصات نقطه‌ای مانند M درسطح محورهای مختصات xOy است مفروض‌است. مطلوب است وضع نقطهٔ M برای آنکه :

اولاً معادله دارای دو ریشهٔ متساوی باشد . ثانیاً معادله دارای دو ریشهٔ متمایز u' و u'' باشد . ثالثاً u' و u'' هردو مثبت باشد . رابعاً به‌فرض $x=۲$ و $y=۱$ منحنی‌تغییرات تابع $V=\frac{u}{uy-x}+\frac{۱}{y-ux}-۱$ را وقتی‌که u از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییرکند ، رسم‌کنید .

۳۸- تابع $y=\frac{x}{۲x^۲-۵x+k}$ مفروض است. اولاً مقادیر k را طوری تعیین‌کنیدکه منحنی دو مجانب یا یك مجانب موازی محور yها داشته باشد ؛ یا آنکه مجانب موازی oy نداشته باشد. ثانیاً حدود k را چنان اختیارکنیدکه منحنی نمایش تابع فوق دارای ماکزیمم یا مینیمم‌باشد؛ یاآنکه در یك جهت تغییرکند . ثالثاً منحنی نمایش تغییرات تابع را به‌ازای $k=۲$ رسم‌کنید . رابعاً اگر خطی مانند $y=h$ منحنی را در دو نقطهٔ $M_۱$ و $M_۲$ قطع کند و $P_۱$ و $P_۲$ تصاویر $M_۱$ و $M_۲$ بر روی محور $x'x$ باشند ، برحسب h مختصات مرکز مستطیل $M_۱M_۲P_۲P_۱$ را حساب کنید و ثابت‌کنیدکه دایرهٔ محیطی این مستطیل همواره به ازای جمیع مقادیر h با دایرهٔ دیگری متعامد است و معادلهٔ آن دایره را بنویسید .

۳۹- تابع $y=\frac{x^۳+۳x^۲+۳x+۱}{x}$ مفروض است. اولاً منحنی (C) نمایش تغییرات آن را رسم‌کنید . ثانیاً از نقطه‌ای که منحنی C محور xها را قطع می‌کند خطی با ضریب زاویه‌ای m مرور می‌کند. در تعداد نقاط تلاقی خط ومنحنی بحث‌کنید . اگر این خط منحنی رادر دونقطهٔ‌دیگر مانند $M_۱$ و $M_۲$ قطع‌کند ، مطلوب است تعیین رابطه‌ای مستقل از m بین طولهای $M_۱$ و $M_۲$.

۴۰- معادلهٔ $(۱-t)x^۲+(۳t-۵)x+۴(۲-t)=۰$ که در آن x مجهول و t پارامتر می‌باشد مفروض است . اولاً در وجود و علامت ریشه‌های آن بحث کنید . ثانیاً وقتی‌که هر دو ریشه مثبت باشند آنها را طولهای دوضلع یك مثلث قائم‌الزاویه فرض می‌کنیم ، حساب کنید وتر این مثلث را برحسب t وتحقیق‌کنیدکه عبارت وتر برحسب t منطق است ومنحنی تغییرات وتر را برحسب t رسم‌کنید (وقتی‌که t طوری تغییر می‌کند که دو ریشه مثبت باشند) . ثالثاً شعاع دایرهٔ محاطی مثلث را برحسب t حساب‌کنید وتغییرات آن را (وقتی‌که t درحدود فوق‌الذکر تغییرمی‌کند) بدست‌آورید. همچنین اندازهٔ این شعاع رابرحسب وتر تعیین کنید .

۴۱- اولاً منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^۳}{x^۲-۱}$ رارسم‌کنید. ثانیاً طول نقاطی از منحنی را بدست آورید که در آنجا ضریب زاویه‌ای مماس برابر عدد m باشد (بحث‌کنید) . ثالثاً هر خط D که موازی نیمساز زاویهٔ xoy باشد منحنی را در دونقطهٔ M و M' تلاقی می‌کند ، مطلوب‌است رسم مکان هندسی وسط قطعه خط MM' وقتی‌که D تغییروضع می‌دهد.

۴۲- اولاً نسبت به دو محور مختصات متعامد Ox و Oy دو خط زیررا رسم‌کنید :

$$۴x-y-۱۰=۰ \qquad x+۲y-۷=۰$$

و ازروی شکل مختصات نقطهٔ تلاقی A دو خط را تخمین بزنید و بعد این مختصات و طول OA را حساب کنید . ثانیاً از نقطهٔ A یك خط با ضریب‌زاویه‌ای منفی $(-m)$ می‌گذرانیم . این خط دو نیم‌خط Ox و Oy را بترتیب در P وQ تلاقی می‌کند . طولهای OP و OQ را حساب کنید و ببینید وقتی که m تغییر می‌کند مساحت مثلث OPQ چگونه تغییر خواهد کرد . این مساحت در ازای یك وضع مخصوص $P_۱Q_۱$ از خط PQ مینیمم می‌شود . $P_۱Q_۱$ را رسم‌کنید . ثالثاً برحسب m ، مربع ارتفاع h خارج از رأس O ازمثلث OPQ را حساب‌کنید و ببینید $h^۲$ با تغییر m چگونه تغییر می‌کند. ماکزیمم $h^۲$ را بدست آورید.

۴۳ ـ مطلوب است تعیین تغییرات تابع $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ و تابع مشتق این تابع و رسم منحنی نمایش این دو تابع.

۴۴ـ سه‌جمله‌ایهای درجهٔ دوم (T) بمعادلهٔ زیر :

$$y=mx^2+(1-3m)x+2m$$

مفروض است . هرسه‌جمله‌ای در ازای یکی از مقادیر پارامتر m بدست می‌آید. اولاً در ازای چه مقدار x مشتق y نسبت به x برابر ۱ است؟ آیا در ازای جمیع مقادیر m فقط یك مقدار برای x بدست می‌آید ؟ ثانیاً برای هرسه جمله‌ای مشتق y نسبت به x درازای یك مقدار x صفر می‌شود . اگر این مقدار را X و مقدار y نظیر آن را Y بنامیم ، X و Y را بر حسب m و بعد Y را برحسب X بدست‌آورید ومنحنی نمایش تغییرات Y را برحسب X نسبت به دومحور متعامد رسم‌کنید .

۴۵ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sqrt{x^3-3x+2}$ را رسم کنید وببینید نقاط تلاقی منحنی بامحور xها چه خصوصیت دارند .

اگر $Y=ax+b$ مجانب این منحنی باشد ، علامت $Y-y$ را وقتی که قدرمطلق x بینهایت بزرگ می‌شود تعیین‌کنید . نقطهٔ تلاقی منحنی را با مجانب وضریب‌زاویه‌ای مماس برمنحنی در این‌نقطه را بدست‌آورید .

۴۶ـ اولاً مطلوب است شرط لازم وکافی برای‌آنکه معادلهٔ $f(z)=z^2+2pz+q=0$ اقلاً یك ریشه بین ۱ـ و ۱+ داشته باشد.
همچنین شرایط‌لازم وکافی برای‌آنکه هردو ریشهٔ معادلهٔ فوق‌بین ۱ـ و ۱+ باشد. ثانیاً نتایج فوق را درمورد معادلهٔ $\sin^2x+2p\sin x-\sin^2\alpha=0$ بکار ببرید (α و p مفروضند) وثابت‌کنیدکه معادلهٔ اخیر همواره دارای یك جواب است‌که درآن صدق می‌کند وتمام جوابهایی راکه دراین معادله صدق می‌کنند بدست‌آورید.

۴۷ ـ دوتابع $y=x^3+Px+q$ و $z=x^3+p'x^2+q'$ مفروضند .

اولاً بافرض معلوم بودن p' و q' می‌خواهیم p و q را بقسمی حساب کنیم که اگر y یك ماکزیمم و یك مینیمم داشته باشد ، ماکزیمم y برابر ماکزیمم تابع z ومینیمم‌آن برابرمینیمم z باشد .
ثانیاً با فرض برقرار شدن این شرایط مطلوب است تعیین تغییرات تابع : $x^3+px+q-q'$ وثابت‌کنیدکه این تابع در ازای دو مقدار x صفر می‌شود وآن دو مقدار را بدست‌آورید .

۴۸ـ اولاً تغییرات تابع $y=\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}$ راتعیین‌ومنحنی نمایش‌آن را رسم‌کنید . ثانیاً درشماره وعلامت ریشه‌های معادلهٔ :

$$\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}=\lambda$$

برحسب اندازه‌های مختلف λ بحث‌کنید. ثالثاً ثابت کنید که بین x' و x'' ریشه‌های این معادله رابطه‌ای مستقل از λ وجود دارد و آن را بدست آورید .

۴۹ـ اولاً تغییرات تابع $y=1+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}$ را تعیین و منحنی نمایش‌آن را رسم‌کنید . ثانیاً برحسب مقادیر مختلف h در شماره و علامت ریشه‌های معادلهٔ :

$$h=1+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2} \qquad (1)$$

بحث‌کنید وبخصوص بگویید در ازای چه مقادیر h این معادله ریشهٔ‌مضاعف دارد. ثالثاً بفرض‌آنکه معادلهٔ (۱) دارای دو ریشهٔ متمایز x_1 و x_2 باشد، ثابت‌کنیدکه :

$$\frac{x_1-4-3\sqrt{2}}{x_1-4+3\sqrt{2}}\cdot\frac{x_2-4+3\sqrt{2}}{x_2-4-3\sqrt{2}}$$

بستگی به h ندارد و مقدارآن را بدست آورید . رابعاً چه مقداری باید

به b داد تا بتوان دوریشهٔ معادله را سینوس وکسینوس یك زاویه اختیارکرد و چگونه می‌توان اندازه‌های آن زاویه را بدست آورد؟

۵۰ـ اولاً بوسیلهٔ رسم منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x+\frac{1}{2x^2}$ معین کنیدکه معادلهٔ $x+\frac{1}{2x^2}=a$ در ازای چه مقادیر a دارای سه ریشهٔ حقیقی است . ثانیاً از نقطهٔ بطول ۱ این منحنی ، خطی با ضریب زاویه‌ای m مرور می‌دهیم تا منحنی را در دو نقطهٔ دیگر M' و M'' تلاقی کند. مختصات نقطهٔ I وسط قطعه خط M'M'' را برحسب m حساب کنید و مکان I را بدست آورید و بگویید چه قسمت از این مکان متعلق به نقاط حقیقی M' و M'' است.

۵۱ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^2+\frac{\lambda^2}{x^2-1}$ را (C) می‌نامیم. اولاً این‌منحنی را در ازای $\lambda=\frac{1}{2}$ رسم‌کنید . ثانیاً مختصات نقاطی از(C) راکه درآنجا مماس برمنحنی موازی محور xهاست برحسب λ حساب‌کنید ودرشمارهٔ آنها برحسب اندازه‌های λ بحث‌کنید .

۵۲ـ جدول‌تغییرات ومنحنی(C) نمایش تغییرات‌تابع $y=\frac{x^2-3x}{x+2}$ را رسم‌کنید . از نقطهٔ A(۰و۳) خطی (D) باضریب زاویه‌ای m می‌گذرانیم. مختصات M نقطهٔ تلاقی (D) و (C) را برحسب m حساب‌کنید. از نقطهٔ A خط (D') را عمود به (D) رسم می‌کنیم تا منحنی را در M' تلاقی‌کند. مختصات وسط MM' راحساب‌کنید .

۵۳ـ نسبت به یك دستگاه دومحور مختصات متعامد منحنیهای نمایش دوتابع $y=\frac{x+1}{x-1}$ و $y=\frac{b(x-1)}{x+1}$ را رسم‌کنید . این دو منحنی ممکن است دارای دونقطهٔ تلاقی A و B باشند. مختصات A و B را بدست

آورید وبرحسب مقادیر مختلف b در وجود این دونقطه بحث‌کنید. معادلهٔ خط AB را بنویسید و ثابت‌کنیدکه این خط در ازای جمیع مقادیر b از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد . درازای چه مقادیرb مختصات A وB اعداد منطقند؟

۵۴ـ اولاً نسبت به دومحور مختصات متعامد ox و oy سهمی (P) به معادلهٔ $y=x^2$ مفروض است . معادلهٔ مماس براین منحنی در نقطهٔ M بطول a را بنویسید . این مماس محور xها را در H و محور yها را در K قطع می‌کند. مختصات H و K را حساب‌کنید . مختصات اوساط‌قطعات MK ، MH و HK را بدست آورید . سهمی (P) و نیز دو سهمی (Q) و (Q') مکان اوساط MH و HK را ، وقتی‌که M روی سهمی P تغییرمکان پیدا می‌کند ، رسم‌کنید . ثانیاً روی سهمی (P) دونقطهٔ M و M' متقارن نسبت به oy وبه طولهای a و a− ، و نیز نقطهٔ M_1 به طول 2a را اختیار می‌کنیم. ثابت‌کنیدکه نقاط تلاقی مماس بر(P) درM_1 باممامهای (P) در M و M' بترتیب روی سهمیهای (Q)و(Q') واقعند. ثالثاًمعادلات D' و D_1 قائمهای بر(P) درنقاط M' و M_1 را بنویسید ومکان هندسی نقطهٔ تلاقی آنهارا بدست‌آورید.

۵۵ـ اولاً نسبت به دومحور مختصات متعامد دومنحنی (C) و (C') به معادلات زیررا رسم‌کنید:

$$(C)\quad y=\frac{1}{x}\qquad (C')\quad y=x+\frac{1}{x}$$

ثانیاً روی (C) نقطهٔ M بطول a را اختیار می‌کنیم وتصاویر آن را روی محورها بترتیب P و Q می‌نامیم . معادلهٔ مماس بر (C) در M را بنویسید. اگر نقاط تلاقی این مماس با محورها بترتیب u و v باشند ، تحقیق کنیدکه P وسط ou و Q وسط ov است . ازآنجا نتیجه بگیرید که مساحت مثلث ouv ثابت است وبستگی به‌جای نقطهٔ M ندارد .

ثالثاً فرض‌کنیم‌که M' نقطهٔ تلاقی خط PM با (C') باشد . معادلهٔ مماس برمنحنی (C')درنقطهٔ M' را بنویسید وتحقیق‌کنیدکه خط مزبور محور yها را در نقطهٔ v تلاقی می‌کند.

رابعاً همچنین اگر N و N' نقطه‌های به طول b از (C) و (C') باشند، تحقیق کنید که دوخط MN و M'N' یکدیگر را در نقطهٔ S بر روی محورyها تلاقی می‌کنند و به فرض آنکه خط MN طوری تغییر کند که S ثابت بماند تحقیق کنید که وسط MN روی خط ثابتی تغییر مکان خواهد داد و نتیجه بگیرید که مکان وسط M'N' نیز خطی است راست.

۵۶ـ تابع $y=\frac{3x^2-2}{x^2+2x+a}$ که درآن a پارامتر می‌باشد مفروض است. اولاً در ازای چه مقادیری از a این تابع همواره در یك جهت تغییر می‌کند. ثانیاً در ازای چه مقادیر a تابع دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم است؟ ثابت کنید که شرایط لازم وکافی برای آنکه تابع در ازای x' ماکزیمم و در ازای x'' مینیمم باشد این است که $x'<x''$ و $x'x''=\frac{2}{3}$ باشد. a را طوری معین کنید که تابع در ازای $\frac{1}{3}$ ماکزیمم و در ازای ۲ مینیمم شود.

دراین حالت منحنی نمایش تغییرات y را رسم کنید. ثالثاً معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش M و m ماکزیمم و مینیمم y باشد و رابطه‌ای مستقل از a بین M و m بدست آورید.

۵۷ ـ اولاً بافرض آنکه h پارامتری بزرگتر از واحد باشد، منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x+h}{1-x^2}$ را رسم کنید. ثابت کنید که اگر تابع در ازای $x=x_0$ ماکزیمم یامینیمم باشد، مقدار این ماکزیمم یا مینیمم برابر $\frac{-1}{2x_0}$ است.

ثانیاً فرض می‌کنیم که خط (D) به معادلهٔ $y=m$ منحنی C را در دونقطهٔ M_1 و M_2 قطع کند و A نقطهٔ به طول a از خط D باشد. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ B مزدوج توافقی A نسبت به M_1 و M_2 وقتی که

D به موازات خود تغییر مکان می‌دهد. a را چگونه باید اختیار کرد تا این مکان مبدل به‌خط راست شود؟ حالت مخصوص $a=\infty$.

۵۸ـ اولاً منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=x^3-x-6$ را رسم کنید.

ثانیاً معادلهٔ مماس بر منحنی (C) را در نقطهٔ تلاقی آن با محور yها بنویسید.

ثالثاً مماس بر (C) در نقطهٔ به طول $x=2$ را بدست آورید ونقطهٔ تلاقی این مماس را با منحنی تعیین کنید.

رابعاً مساحت سطحی راکه واقع است بین منحنی و محور xها وخطی که از نقطهٔ نظیر ماکزیمم y موازی محورyها می‌گذرد حساب کنید.

۵۹ ـ اولاً نسبت به یك دستگاه دو محور مختصات متعامد سهمی $y=\frac{x^2}{2p}$ مفروض است (p ثابت). ازنقطهٔ A به طول a واقع برمحورxها خطی(D) باضریب زاویه‌ای m مرور می‌دهیم. m را برحسب a طوری اختیار کنید که D بر سهمی مماس باشد. در این صورت معادلهٔ مماس و مختصات نقطهٔ تماس M رابنویسید.

ثانیاً وقتی که a جمیع مقادیرممکنه را اختیار می‌کند، تغییرات تانژانت زاویهٔ بین دو خط OM و AM را تعیین و منحنی نمایش آنرا رسم کنید.

ثالثاً تعیین کنید مکان هندسی پایهٔ عمود وارد از A برخط OM را وقتی که A تغییر می‌کند.

۶۰ـ تعیین کنید که نقطهٔ M(a و b) درچه ناحیه از صفحهٔ دو محور مختصات متعامد ox و oy باید باشد برای آنکه معادلهٔ زیر دو ریشه بین ۱- و ۱+ داشته باشد.

$$4x^2+4(a+b)x+a^2+b^2=0$$

۶۱ـ از نقطهٔ S واقع بر قطر AB از یك دایرهٔ O یك خط رسم می‌کنیم تا بر دایره در M مماس شود و مماس در A بر دایره با T

قطع کند . OS را x می‌نامیم .

اولاً برحسب R و x حساب کنید (y) مساحت مثلث TAS و (z) نسبت $\frac{TS}{OS}$ را.

ثانیاً تغییرات z را وقتی که S روی قطر AB تغییر مکان پیدا می‌کند . معلوم کنید و ببینید در ازای چه وضعی از S مساحت (y) مثلث TAS مینیمم خواهد بود .

۶۲- قطعه خط CC' به طول ۷ ، دایرهٔ (C) به مرکز C و به شعاع ۱ و دایرهٔ (C') به مرکز C' و به شعاع $\sqrt{22}$ مفروضند .

اولاً تعیین کنید نقطهٔ تلاقی (O) محور اصلی دو دایره با خط CC' را.

ثانیاً روی خط نامحدود CC' مبدأ را نقطهٔ O و جهت مثبت را جهت از O به C' اختیار و فرض می‌کنیم که M نقطه‌ای متغیر به طول x از خط‌المرکزین باشد . برحسب x حساب کنید y خارج قسمت قوتهای M نسبت به دو دایرهٔ (C) و (C') را . و تعیین کنید تغییرات y را وقتی که M جمیع مواضع ممکن را روی محور xها اختیار می‌کند . در ازای چند وضع M ، خارج‌قسمت دو قوت دارای یك اندازهٔ k خواهد شد ؟

۶۳- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a مفروض است. از نقاط B و C عمودهای BB' و CC' را برصفحهٔ مثلث اخراج می‌کنیم و از A یك صفحهٔ (P) مرور می‌دهیم تا BB' را در M و CC' را در N تلاقی کند . اگر BM را x و CN را y بنامیم، چه رابطه‌ای بین x ، y و a باید برقرار شود تا مثلث AMN در رأس M قائم‌الزاویه شود ؟ با این شرط اگر x را متغیر بگیریم. تعیین کنید، اولاً تغییرات تابع y را ثانیاً تغییرات مساحت سطح مثلث AMN را.

۶۴- دومحور مختصات متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ و طول a مفروضند. روی Ox نقطهٔ A را به طول a و روی Oy نقطهٔ B را به عرض a اختیار می‌کنیم . M نقطه‌ای متغیر به طول x از محور $x'Ox$ ، و N نقطهٔ تلاقی

خط BM با خطی است که از A به موازات محور yها می‌گذرد .

اولاً برحسب x تفاضل طولهای AM و AN را حساب کنید . آیا عبارت این تفاضل برای جمیع مواضع M یکسان است ؟

ثانیاً تمام مواضع M را که در ازای آنها $AM-AN$ مساوی $-\frac{a}{2}$ است بدست آورید.

ثالثاً وقتی که M محور $x'Ox$ را می‌پیماید ، تغییرات $AM-AN$ را تعیین کنید .

۶۵- دو نقطهٔ O و A و نیم‌خط Ox که با OA زاویهٔ $60°$ می‌سازد مفروضند . M نقطه‌ای متغیر روی نیم‌خط Ox است . OA را a و OM را x می‌نامیم .

اولاً وقتی که x از (0) تا $(+\infty)$ تغییر می‌کند ، تغییرات تابع $y=\frac{\overline{MA}^2}{OM}$ را تعیین و منحنی نمایش آن تغییرات را رسم کنید .

ثانیاً x را قسمی بگیرید که y برابر l باشد . در امکان مسئله بحث کنید .

ثالثاً در ازای هرمقدار مناسب l دو وضع M' و M'' برای نقطهٔ M بدست می‌آید . ثابت کنید که دایرهٔ $AM'M''$ در نقطهٔ A بر OA مماس است و شعاع آن را پیدا کنید.

۶۶- نیم‌دایرهٔ به قطر AB ، به مرکز O و به شعاع R مفروض است. از نقطهٔ M متعلق به این نیم‌دایره عمود MP را برمماس در B وارد می‌کنیم وطول PM را x و طول خط منکسر AMP را y می‌نامیم.

اولاً درچه وضع M اندازهٔ y برابر طول معین a است؟

ثانیاً در تغییرات y برحسب x وقتی که M روی نیم‌دایره تغییر می‌کند بحث کنید .

ثالثاً مطلوب است تعیین و ترسیم AM و MP وقتی که $MP=AM$.

۶۷ـ اولاً جدول‌تغییرات ومنحنی(C) نمایش تابع: $y = x + \frac{4}{x^2}$ (۱) را رسم‌کنید.

ثانیاً ثابت کنیدکه تابعی مانند $F(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x}$ وجوددارد که مشتق‌آن برابرتابع (۱) باشد.

ثالثاً اگرA نقطه‌ای به‌طول ۲ واقع برمنحنی(C) باشد، مطلوب‌است سطح محصور بین منحنی C ومجانب‌مایل آن‌درفاصلهٔ $x = 2$ و $x = \lambda > 2$.
حد سطح فوق را به ازای $\lambda = \infty$ تعیین‌کنید.

رابعاً مختصات نقطهٔ تلاقی مماس بر A را بامنحنی (C) پیدا کنید.

۶۸ ـ تابع $y = \frac{x^2+bx+c}{x^2+px+q}$ مفروض است:

اولاً مقادیر c، b، p و q را بقسمی تعیین کنید که تابع به ازای $x = 1$ دارای ماکزیممی برابر ۳ و بهازای $x = -1$ مینیممی برابر ۳− داشته باشد و منحنی نمایش آن‌را رسم‌کنید.

ثانیاً اگر خطی موازی محور xها به معادلهٔ $y = m$ منحنی را در دو نقطهٔ M و M' قطع کند، حدود m را قسمی تعیین کنید که دو نقطهٔ M و M' وجود داشته باشد و در این صورت مختصات نقاط تلاقی را حساب‌کنید.

ثالثاً ثابت‌کنیدکه شرط لازم وکافی برای اینکه سه نقطه به طولهای x_1، x_2 و x_3 واقع بر منحنی بر یك استقامت باشند این است‌که داشته باشیم:

$$x_1x_2x_3 - (x_1+x_2+x_3) = \frac{2}{3}$$

رابعاً به‌کمك رابطهٔ اخیر یا مستقیماً ثابت کنید که منحنی دارای سه نقطهٔ عطف است و این نقاط بریك استقامتند.

خامساً به‌کمك همان رابطه یا مستقیماً ثابت‌کنیدکه از هر نقطهٔ به طول

a واقع بر منحنی دو مماس می‌توان بر آن رسم کرد. طولهای نقاط تماس ریشه‌های معادلهٔ $3ax^2 - 6x - (3a+2) = 0$ می‌باشند.

۶۹ـ خط $y = x\,tg\alpha$ (α پارامتری است متغیر) و هذلولی $y = \frac{bx}{x-a}$ در دو نقطه تلاقی می‌کنند (a وb مقادیری ثابت ومثبتند). اگر r فاصلهٔ دونقطهٔ تلاقی خط ومنحنی باشد، برحسب α منحنی تغییرات r را رسم‌کنید.

۷۰ـ اولاً منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y = (x^2 - 3x + 1)^2$ را رسم‌کنید.

ثانیاً مساحت‌سطح‌محصور بین منحنی C وخط $y = 1$ راحساب کنید.

ثالثاً معادلهٔ $(x^2 + px + 1)^2 = m^2$ که در آن p و m دو مقدار ثابتند و $m > 0$ مفروض است. به چه شرط معادلهٔ فوق چهار ریشه دارد؟
رابطهٔ بین m و p را پیداکنید بقسمی‌که چهار ریشهٔ معادلهٔ مفروض جمله‌های متوالی یك تصاعد عددی باشند.

رابعاً باشرط فوق و $p = \frac{2}{\cos\varphi}$ ریشه‌های معادلهٔ فوق را برحسب φ حساب کنید.

خامساً به‌فرض‌آنکه شرایط فوق برقرارباشد وبه‌فرض $u = \sqrt{5}\,tg\frac{\varphi}{2}$، ثابت‌کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه ریشه‌ها منطق باشند این است که u منطق باشد.

۷۱ـ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر مفروض است:

$$(1+\sin\varphi)x^2 - (1+\sin^2\varphi)x + \sin\varphi(1-\sin\varphi) = 0$$

که φ پارامتری است متغیر.

اولاً رابطهٔ بین ریشه‌ها را پیداکنیدکه به مقدارφ بستگی نداشته باشد.

ثانیاً به ازای چه مقدار $\sin\varphi$ ریشه‌ها متساویند؟

ثالثاً منحنی تغییرات حاصل ضرب دوریشه را وقتی‌که φ بین صفر تا 2π تغییرمی‌کند رسم کنید.

۷۲ـ تابع $y=\frac{x^2+2}{x^2-x-2}$ مفروض است. اولاً منحنی (C) نمایش تغییرات آن را رسم کنید. ثانیاً در تعداد نقاط تلاقی خط $y=m$ بامنحنی (C) بحث کنید و برحسب مقادیر m ریشه‌های معادلهٔ حاصل را بادوعدد ۱ــ و ۱ مقایسه کنید ونتیجه را روی شکل نیز تحقیق کنید.

ثالثاً اگر این خط منحنی را در دو نقطهٔ M_1 و M_2 ومحور yها را در نقطهٔ B قطع کند، مطلوب است مکان هندسی اوساط M_1M_2 و تحقیق اینکه این مکان از نقاط مشخص‌منحنی (C) می‌گذرد وهمچنین مکان هندسی نقطهٔ D مزدوج توافقی نقطهٔ B نسبت به دو نقطهٔ M_1 و M_2.

رابعاً مقدارm راچنان پیداکنیدکه $M_1M_2=d=3$ شود.

۷۳ـ دو محور عمود برهم $x'ox$ و $y'oy$ مفروضند. نقطهٔ متغیر P را روی ox اختیار می‌کنیم و خط Δ را موازی $y'oy$ از P می‌گذرانیم و روی Δ نقطهٔ Q را به‌عرض ۱ــ جدا می‌کنیم. اگر M نقطهٔ تلاقی عمود مرسوم از O بر OQ باخط Δ باشد، اولاً مطلوب است تعیین y عرض نقطهٔ M برحسب x طول نقطهٔ P [آن را $y=\varphi(x)$ می‌نامیم]. منحنی مکان M را وقتی که x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند رسم کنید. ثانیاً بفرض آنکه(C) منحنی نمایش $y=\varphi(x)+\frac{2}{x}$ باشد، منحنی (C) را رسم کنید.

۷۴ـ تابع $y=\frac{x^3-ax^2-a^2x+5a^3}{x^2-2ax+a^2}$ مفروض است. ثابت کنید که تابعی مانند $z=\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x}{x-a}$ می‌توان یافت‌که مشتق آن نسبت به x مساوی تابع y شود. دراین صورت α و β و γ را پیداکنید و منحنی (C) نمایش تابع y را در ازای $a=1$ رسم کنید وسطح محصور بین منحنی C و مجانب‌آن و دوخط $x=3$ و $x=\lambda>3$ را حساب‌کنید.

آیا این سطح به ازای $\lambda=\infty$ دارای حدی هست یاخیر؟

۷۵ـ منحنی (C) تغییرات تابع $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ دارسم‌کنید وتحقیق کنید که منحنی فقط دارای یك نقطهٔ عطف است. ثانیاً ثابت کنید که به‌ازای جمیع مقادیر m خط (D) به معادلهٔ $y=mx+1$ ازنقطهٔ ثابتی‌می‌گذرد ومختصات‌آن نقطه را حساب کنید. ثالثاً خط (D) منحنی (C) را در یك نقطهٔ ثابت A قطع می‌کند. معین کنید به ازای چه مقادیر m آن را در دو نقطهٔ دیگر P_1 و P_2 قطع می‌کند؟ و ثابت کنید که وقتی m تغییر می‌کند، وسط P_1P_2 همواره روی خط ثابتی که معادلهٔ آن را تعیین خواهید کرد تغییر می‌کند. رابعاً اندازهٔ P_1P_2 را برحسب زاویهٔ αکه خط D باجهت مثبت محور xها می‌سازد حساب کنید و تغییرات آن را وقتی که α از صفرتا $\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند تعیین کرده و منحنی آن را رسم کنید.

۷۶ـ دو محور متعامد ox و oy و چهار نقطهٔ A و 'A روی محور ox و B و 'B روی محور oy بقسمی مفروضندکه $oA=2$ و $oB=4$ و $AA'=n$ و $BB'=-n$ (nعددی است جبری). اولاً مقدار n را قسمی تعیین کنیدکه حجمهای مخروطهای حادث از دوران AoB و A'oB' حول محورoy متعادل‌باشند وبرحسبn بحث کنید.

ثانیاً برحسب n مختصات I نقطهٔ تلاقی دو خط AB و A'B' را حساب‌کنید.

ثالثاً حجم حادث از دوران مثلث BIB' را حول oyبرحسب n پیدا کنید وتغییرات این حجم را برحسب متغیرn در دوحالت زیر تعیین و منحنی آن را رسم‌کنید.

$$-3<n<0 \quad و \quad 0<n<4$$

۷۷ـ اولاً معادلهٔ $\cos^2\frac{x}{2}-2a\cos\frac{x}{2}+b=0$ (۱) راکه‌درآن

a و b مختصات نقطه‌ای مانند M واقع در سطح دو محور $x'ox$ و $y'oy$ می‌باشند حل کنید. ثانیاً مطلوب است محل نقطهٔ M درسطح محورهای مختصات برای آنکه $\cos\frac{x}{2}$ دو مقدار قابل قبول داشته باشد . ثالثاً با این شرایط معادله‌ای تشکیل دهیدکه ریشه‌هایش مقادیر $\cos x$ باشد. رابعاً بفرض $b=-\frac{1}{2}$ منحنی نمایش تغییرات ریشه‌های معادلهٔ $z^2-2az+b=0$ را وقتی که a از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند رسم کنید و از روی منحنی درستی شرط وجود جواب معادلهٔ (۱) را تحقیق کنید . خامساً برحسب مقادیر a از روی منحنی درجوابهای نامعادلهٔ $\cos\frac{x}{2}<2a+\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}$ بحث کنید .

۷۸ـ معادلهٔ $x^2-2yx+a(y-4a)=0$ که در آن x متغیر و a طول ثابتی است مفروض است . اولاً منحنی تغییرات $y=f(x)$ را تعیین کنید . ثانیاً در ازای هرمقدار از y دومقدار نظیر x_1 و x_2 برای x بدست می‌آید . ثابت کنیدکه بین x_1 و x_2 رابطه‌ای مستقل از y وجود دارد . ثالثاً مستطیلی به قاعدهٔ قدرمطلق x_1-x_2 وبه ارتفاع قدر مطلق نظیر y در نظرمی‌گیریم . اگر این مستطیل حول ضلع عمود برقاعده دوران کند، مطلوب است محاسبهٔ V حجم استوانهٔ حادث وتعیین تغییرات ورسم منحنی V (توجه کنید ، مقدار عددی حجم همیشه مثبت است).

۷۹ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2-2x+3}$ مفروض است. اولاً مقادیر a و b راقسمی پیدا کنید که ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۲ و ۱− باشد ، و یا به ازای $x=3$ ماکزیممی برابر ۲ داشته باشد . ثانیاً به ازای $a=2$ و $b=-3$ منحنی نمایش تغییرات آن را رسم کنید و تحقیق کنید که منحنی دارای سه نقطهٔ عطف است که بریك استقامت قرار دارند . ثالثاً اگر خط

$y=m$ منحنی را در دو نقطهٔ M_1 و M_2 قطع کند و تصاویر این نقاط را روی محور xها N_1 و N_2 بنامیم ، ثابت‌کنید همواره نقطه‌ای مانند P بر روی محور x می‌توان یافت بقسمی‌که $PN_1\times PN_2$ مقدار ثابتی‌باشد . محل نقطهٔ P و این مقدار ثابت را پیدا کنید و از آنجا بگویید که دوایر به قطر N_1N_2 چگونه‌اند و دارای یك محور اصلیند . معادلهٔ محور اصلی را بنویسید و همچنین دوایر ماربر N_2N_1 همگی با دایرهٔ ثابتی متعامدند، مرکز و شعاع این دایره را تعیین کنید .

۸۰ـ تابع $y=\frac{ax^2+bx+a}{ax+b+a}$ مفروض است . اولاً تحقیق کنید به ازای جمیع مقادیر a و b منحنیهای تابع مفروض از نقطهٔ ثابتی مرور می‌کنند و مختصات‌آن نقطه را پیدا کنید . ثانیاً اگر $M\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ واقع در صفحهٔ محورهای مختصات باشد ، تعیین کنید محل نقطهٔ M را برای اینکه منحنی تابع مفروض دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم باشد یا اینکه در یك جهت تغییر کند . ضمناً تحقیق کنیدکه آیا منحنی فوق می‌تواند فقط یك ماکزیمم یا فقط یك مینیمم داشته باشد ؛ مکان نقطهٔ M را چنان تعیین کنیدکه منحنی‌تابع بر محورxها مماس باشد. ثانیاً تحقیق کنید که خط مرسوم بر نقاط‌ماکزیمم و مینیمم به ازای جمیع مقادیرa و b ، امتداد ثابتی دارد . آن امتداد را پیدا کنید . ثالثاً به فرض $a=1$ مقدار b را قسمی تعیین کنید که مماس بر منحنی در نقطهٔ به طول ۱ موازی خط $y=\frac{3}{4}x$ شود . رابعاً به ازای $a=1$ و $b=2$ منحنی نمایش تغییرات تابع y را رسم کنید .

خامساً اگردر معادلهٔ : $y=\frac{x^2+2x+1}{x+3}$ ، y پارامتر باشد ، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل را با اعداد ۱ و ۵− مقایسه کنید ونتیجهٔ مقایسه را از روی منحنی نیز تحقیق کنید .

۸۱- تابع $y=\frac{2x+1}{2x^2+1}$ مفروض است . اولاً منحنی نمایش تغییرات آن را رسم کنید و در وجود نقاط تقاطع خط $y=k$ با منحنی بحث کنید .
ثانیاً اگر نقطهٔ تلاقی خط $y=k$ را با منحنی M_1 و M_2 بنامیم ، مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M وسط M_1M_2 و همچنین مکان هندسی نقطهٔ P مزدوج توافقی نقطهٔ D محل تلاقی M_1M_2 با محور yها نسبت به دو نقطهٔ M_1 و M_2 . ثالثاً مطلوب است تشکیل معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش ضریبهای زاویه‌ای دوخط OM_1 و OM_2 باشد (O مبدأ مختصات است) و تحقیق کنید که بین این ضریبهای زاویه‌ای رابطه‌ای مستقل از k وجود دارد. و همچنین تحقیق کنید که بین طولهای نقاط M_1 و M_2 رابطهٔ مستقلی از k وجود دارد . از آنجا ثابت کنید که تصاویر این دو نقطه بر روی محور x'x مزدوج توافقی دو نقطهٔ ثابتند و آن دو نقطه را بیابید . رابعاً برای اینکه سه نقطه از منحنی به طولهای x_1 ، x_2 و x_3 بر یك استقامت باشند باید داشته باشیم:

$$4x_1x_2x_3+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-2(x_1+x_2+x_3)=1$$

خامساً ثابت کنید که نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنی و نقطه‌ای که محور yها را قطع می‌کند بر یك استقامت است . سادساً ثابت کنید که سه نقطه بر منحنی وجود دارد که در آنها دو مماس مرسوم از یك نقطه برمنحنی برهم منطبقند.

مسائل امتحانات نهایی و مسابقه‌ها

۱- سه جمله‌ای درجهٔ دوم $y=ax^2+bx+c$ مفروض است .
مطلوب است اولاً تعیین مقادیر ضرایب a ، b و c بطوری‌که به ازای $x=2$ سه جمله‌ای مفروض مینیمم بوده ، مقدار این مینیمم -1 باشد و علاوه‌براین به ازای $x=1$ مقدار سه جمله‌ای مفروض مساوی ۱ باشد .

ثانیاً فرض می‌کنیم که منحنی نمایش تغییرات سه جمله‌ای مفروض

محور y'y را در نقطهٔ A قطع نماید و B نقطهٔ مینیمم منحنی باشد . تعیین کنید نقطهٔ D از منحنی راکه مماس برآن موازی AB باشد .

ثالثاً سطح محصورما بین منحنی‌وعرضهای نقاط A و D راحساب‌کنید.

۲- نیمدایرهٔ $AB=2R$ مفروض است . در روی امتداد AB نقطهٔ C را به فاصلهٔ $AC=d$ اختیار می‌نماییم. حال نقطه‌ای مانند M در روی نیمدایره چنان تعیین کنیدکه CM واسطهٔ هندسی مابین MA و MB باشد.
زاویهٔ $\widehat{BAM}=x$ را مجهول مسئله انتخاب کرده و در معادله نسبت به پارامتر d بحث کنید .

۳- تابع $y=x^3+px^2+qx+r$ مفروض است . مطلوب است اولاً تعیین p ، q و r بطریقی‌که به ازای $x=-1$ مقدار y صفر گشته و به ازای $x=-2$ دارای ماکزیمم یا یك مینیمم مساوی یك باشد . پس از تعیین مقادیر p ، q و r معادلهٔ $y=0$ راحل‌کرده و همچنین تحقیق کنید که به‌ازای $x=-2$ تابع y ماکزیمم است یا مینیمم .

ثانیاً منحنی نمایش تغییرات $y=(x+1)(x^2+3x+1)$ را رسم کرده و فرض می‌کنیم‌که نقاط A و B به‌طولهای -2 و -1 دونقطه از منحنی مذکور باشند . مطلوب است سطح محصور بین محور ox و عرض نقطهٔ A و قوس AB منحنی.

ثالثاً مطلوب است تعیین معادلهٔ خط D که از نقطهٔ B مرور کرده و ضریب زاویه‌ای آن مساوی m باشد مختصات نقاط تقاطع این خط را با منحنی فوق معین‌کنید .

۴- سه نقطهٔ o ، A و B بر یك استقامت واقع می‌باشند بطریقی که oA مساوی AB و مساوی ۱ می‌باشد . از نقطهٔ o خطی مانند oC بطریقی رسم می‌کنیم که با oA تشکیل زاویهٔ α را بدهد و بعد از نقاط A و B دو عمود AA' و BB' را بر oC فرود می‌آوریم و شکل را حول

oC دوران می‌دهیم . مطلوب است اولاً سطح کل S و حجم V مخروط ناقص حادث از دوران ذوزنقهٔ ABB'A' . ثانیاً بفرض $S=\frac{11\pi}{4}$ مقدار α را حساب کنید . ثالثاً تغییرات V را وقتی که α ازصفر تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند تعیین کنید .

۵ ـ دو دایرهٔ متساوی C و C' به شعاع a و به بعدالمرکزین $CC'=4a$ مفروض می‌باشد . از نقطهٔ o وسط CC' محوری چنان رسم کنید که با CC' تشکیل زاویه‌ای مساوی α بدهد و برروی این محور نقطه‌ای مانند M به فاصلهٔ $oM=x$ اختیار کنید . اولاً قوتهای نقطهٔ M را نسبت به دو دایرهٔ C و C' از روی a ، x و α حساب کنید .

ثانیاً نسبت این دو قوت را تشکیل داده تغییرات آن را در حالات مختلفهٔ $\alpha=0$ و $\alpha=\frac{\pi}{6}$ و $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ، وقتی که متغیر x باشد ، تعیین کنید .

۶ـ مربعی مانند ABCD به ضلع a مفروض است. ازرأس A خطی مانند AMN رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌ای برابر با φ ایجاد کند . این خط ضلع BC یا امتدادش را در نقطهٔ M و CD یا امتدادش را در نقطهٔ N قطع می‌کند وزاویهٔ φ از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند . اولاً ثابت کنید که

$\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}$ مقداری است ثابت .

ثانیاً منحنی نمایش تغییرات $y=\frac{1}{AM}+\frac{1}{MN}$ را رسم کنید .

ثالثاً زاویهٔ φ را بطریقی تعیین نمایید که $AM\times AN=k^2$ باشد (بحث).

۷ـ در مثلث ABC نسبت میانه‌های مرسوم از رئوس B و C مساوی

با نسبت دو ضلع AB و AC است ($\frac{BN}{CP}=\frac{AB}{AC}$) . ثابت کنید که در چنین مثلثی هرگاه اضلاع AB و AC مساوی نباشند، اولاً روابط $b^2+c^2=2a^2$ و $S=\frac{a^2}{4}tgA$ برقرار می‌باشد .

ثانیاً با فرض معلوم بودن a و $S=\frac{ma^2}{4}$ زوایای مثلث ABC را حساب کنید .

ثالثاً منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^2+\frac{m^2}{x^2-1}$ را درحالی که $m=\frac{1}{2}$ باشد رسم کنید و مختصات نقاطی از منحنی فوق راتعیین کنید که مماس در آن نقاط موازی محور x'x باشد .

۸ـ اولاً تغییرات تابع $y=\frac{2x-2a^3}{(x+2a)^2}$ و منحنی نمایش تغییرات آن را تعیین کنید . ثانیاً معادلهٔ خط مماس در یك نقطه ازمنحنی‌رابنویسید.

ثالثاً عدهٔ خطهای مماسی را که از یك نقطهٔ معین می‌گذرند تعیین کنید.

رابعاً مکان هندسی P را بطریقی تعیین کنید که اگر از این نقاط دو خط مماس رسم کنیم بریکدیگر منطبق شوند .

۹ـ تابع $y=x^2-1-m(x-1)$ مفروض است . مقدار m را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض بر محور xها مماس شود . پس از تعیین مقادیر m منحنیهای نمایش تغییرات تابع حاصل را رسم کرده سطح محصور مابین منحنیها و محور xها را تا $\frac{1}{3}$ تقریب حساب کنید.

۱۰ ـ تابع $y=\frac{ax^2+20x}{x^2+2x-3}$ که در آن x متغیر و a نمایش پارامتری می‌باشدمفروض است . مطلوب است اولاً محاسبهٔ مقدار a بطریقی

که تابع به ازای $x=-2$ ماکزیمم باشد .

ثانیاً پس از تعیین a جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید .

ثالثاً خط $y=m$ مفروض است . در وجود نقاط تقاطع آن با منحنی C برحسب مقادیر m بحث کنید . اگر M' و M'' نقاط تقاطع خط فوق با منحنی C باشد ، ثابت کنید که بین طولهای این دو نقطه رابطه‌ای که بستگی به مقدار m ندارد موجود است . رابعاً معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P وسط قطعهٔ $M'M''$ را تعیین نموده و منحنی C' نمایش تغییرات آن را رسم کنید و معلوم کنید که دو منحنی C و C' دارای خط مجانب مشترکی بوده ودر نقاط مشخصه یکدیگر را تلاقی می‌کنند . خامساً معادلهٔ :

$$tg\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{23x+4}{x+1}\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{7x+18}{x+3}\right)=1$$

را حل نموده وازمنحنی C نتیجه برای حل و بحث این معادله بدست آورید .

۱۱- در سطح محورهای قائم ox و oy خط ثابتی مانند D عمود برمحور ox وبه فاصلهٔ a از محور oy فرض می‌کنیم وبعد نقطهٔ غیرمشخصی مانند P برروی D اختیار کرده مثلث قائم‌الزاویهٔ PoQ راکه زاویهٔ قائمه‌اش در o و وترش PQ موازی ox باشد رسم می‌کنیم . مطلوب است : اولاً تعیین مکان هندسی نقطهٔ Q وقتی که نقطهٔ P محلش را در روی خط D تغییر دهد . ثانیاً دایره‌ای به مرکز Q مار بر P که خط غیر محدود oQ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند رسم کرده ثابت کنید که PA و PB منصف زوایایی می‌باشند که از تقاطع خطوط D و oP تشکیل می‌شود و ازآن استنباط کنید که نقاط A و B متعلق به سهمی می‌باشند که کانون آن نقطهٔ o و خط هادی آن D است .

۱۲- دایره‌ای به قطر $AB=2R$ مفروض است . در نقطهٔ A مماسی بردایره رسم کرده وآن را به طول $AP=a$ امتداد می‌دهیم . بعد از نقطهٔ P قاطعی چنان رسم می‌کنیم که با AP تشکیل زاویه‌ای مانند φ داده ومحیط دایره را درنقاط M و N و خط AB را در نقطهٔ K قطع کند . مطلوب است :

اولاً محاسبهٔ $y=\frac{PM+PN}{2}$ از روی R ، φ و a . ثانیاً تعیین φ بطریقی که $\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}=\frac{2}{h}$ باشد (بحث) .

۱۳- مطلوب است رسم منحنی تغییرات $y=ax^2+2bx+c$ وبعد معلوم کنید ، اولاً به چه شرط خط مار بر مبدأ با ضریب زاویه‌ای m منحنی فوق را قطع می‌کند . ثانیاً تعیین کنید ضریبهای زاویه‌ای دوخطی را که ازمبدأ برمنحنی مماس شوند . ثالثاً زاویهٔ φ حادثه مابین این دو خط مماس را معلوم کرده و تعیین کنید در چه حالتی زاویهٔ φ قائمه خواهد بود . رابعاً مختصات نقاط تماس P و Q این دو خط مماس را معلوم کنید . خامساً سه‌جمله‌ای $ax^2+2bx+c$ را به واسطهٔ دو ریشه‌اش x' و x'' وظل زاویهٔ φ مشخص کرده بحث کنید .

۱۴- تابع مثلثاتی $y=8\cos^5x-10\cos^3x+5\cos x$ که در آن x نمایش قوس محصور مابین ۰ و π است مفروض است . اولاً تحقیق کنید که می‌توان تابع مفروض را بصورت $y=A\cos x+B\cos 5x$ تبدیل کرد . A و B نمایش ضرایب عددی می‌باشند که باید آنها را حساب کنید. ثانیاً جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع y را رسم کنید . ثالثاً سطح محصور بین منحنی و محور طولها و محور عرضها را حساب کنید . رابعاً جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=8x^5-10x^3+5x$ را رسم کنید . خامساً سطح محصور بین منحنی و خط مماس بر نقطهٔ مبدأ آن قسمتی را که در زیر خط مماس ودرفوق محور $x'x$ است حساب کنید .

۱۵ - تابع $y=\frac{x^2+px+q}{x(x-2)}$ مفروض است، اولاً مقادیر p و q را بطریقی حساب کنید که تابع به ازای $x=3$ دارای ماکزیمم یا مینیممی مساوی ۲ باشد .

ثانیاً منحنی C نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2+2x+9}{x(x-2)}$ را رسم کنید . ثالثاً منحنی فوق را با خطی موازی محور $x'x$ به عرض m قطع می‌کنیم . مطلوب است تشکیل معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌های آن طول M و M' نقاط تقاطع باشد و مختصات نقطهٔ P وسط MM' ومعادلهٔ مکان آن را تعیین کرده آن را رسم کنید . رابعاً مقدار m را بطریقی تعیین کنیدکه هرگاه ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم فوق را $tg\alpha$ و $tg\beta$ فرض کنیم ، $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$ باشد وپس ازتعیین m مقادیر α و β را حساب‌کنید.

۱۶ ـ نیم‌دایره‌ای به قطر BC مفروض است . نقطه‌ای مانند A' بر روی قطر BC اختیار کرده وعمودی از این نقطه بر BC اخراج کرده و امتداد می‌دهند تا محیط نیم‌دایره را در نقطهٔ M قطع کند . برروی $A'M$ نقطه‌ای مانند A بطریقی فرض می‌کنندکه $\frac{A'A}{A'M}=m$ باشد (نقطهٔ A درخارج نیم‌دایره واقع‌بوده و m نمایش عددی‌است مثبت) . مطلوب است : اولا تعیین رابطه‌ای مابین tgB و tgC در مثلث ABC وبفرض $A=45^\circ$ و $m=1+\sqrt{2}$ زوایای B و C را حساب کنید . ثانیاً بـر روی $A'M$ نقطه‌ای مانند A'' بطریقی انتخاب می‌کنند که $\frac{A'A''}{A'M}=\frac{1}{m}$ باشد(نقطهٔ A'' درداخل دایره واقع می‌باشد) . ثابت‌کنید که زوایای BAC و $BA''C$ مکمل یکدیگر می‌باشند و بعکس . اگر M محیط نیمدایره را طی‌کند ، مکانهای هندسی A و A'' چه خواهند بود ؟ ثالثاً ثابت کنید که در حالت مخصوص $m=3$ فاصلهٔ oH یعنی فاصلهٔ مرکز o دایرهٔ محیطی مثلث ABC ازنقطهٔ H محل تقاطع سه‌ارتفاع‌همین مثلث، مساوی $\frac{BC}{2}$ می‌باشد .

۱۷ ـ تـابع $y=\frac{2x^2+m^2}{x-2m}$ (۱) مفروض‌است .اولاً فرض می‌کنیم

که خط $y=l$ منحنی نمایش تغییرات تابع(۱) راوقتی‌که درآن $m=1$ باشد در دو نقطهٔ A و B و محور $y'y$ را در نقطهٔ C قطع کند . مطلوب است محاسبهٔ طول نقطهٔ D مزدوج توافقی C نسبت به A و B . معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ D را برحسب تغییر l تعیین‌کنید . ثانیاً ثابت‌کنیدکه تابع (۱) به ازای مقادیر مختلفه m (باستثنای $m=0$) دارای ماکزیمم و مینیممی است واگر M' نقطهٔ ماکزیمم و M'' نقطهٔ مینیمم باشد ، ثابت‌کنید که نقطهٔ M وسط $M'M''$ همواره برروی خط مستقیمی حرکت می‌کند و معادلهٔ این خط مستقیم را معین کنید . ثالثاً مطلوب است تشکیل معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش‌عرضهای نقاط M' و M'' باشند . رابعاً ثابت کنیدکه منحنی نمایش تغییرات تابع (۱) به‌ازای جمیع مقادیر m(بغیر از $m=0$) همواره بردو خط ثابت مماس است . معادلهٔ این دوخط ثابت را تعیین‌کنید .

۱۸ ـ روابط :

$$x=a(1+\cos\alpha)-b\sin\alpha \qquad (1)$$

$$y=a\sin\alpha+b(1+\cos\alpha) \qquad (2)$$

مفروض است . اولاً فرض می‌کنیم $a=b=1$ باشد. در این صورت x و y را برحسب α حساب کرده جدول و منحنی تغییرات تابع $z=xy$ را هرگاه α از 0 تا 2π تغییرکند رسم‌کنید و سطح حادث مابین منحنی و محور $O\alpha$ را در دو نقطهٔ تقاطع متوالی منحنی با محور $O\alpha$ حساب کنید . ثانیاً فرض می‌کنیم x ، a و b معلوم باشد . حال معادلهٔ (۱) را برحسب α حل و بحث‌کنید وهرگاه x مقداری ثابت و a و b مختصات نقطه‌ای از سطح دو محور قائم باشد ، تعبیر گرافیکی برای بحث فوق معلوم کنید . ثالثاً فرض می‌کنیم a ، b ، x و y معلوم و α مجهول باشد . مطلوب است رابطه‌ای مابین معلومات فوق برای آنکه دو معادلهٔ (۱) و (۲) برحسب α دارای ریشه‌های مشترك باشند و تحقیق کنید که این شرط در حالت $x=0$ و $y=2b$ صدق می‌کند و با این فرض هرگاه α_1 ریشهٔ مشترك دو معادله باشد $\sin\alpha_1$ و $\cos\alpha_1$ و $tg\alpha_1$ را برحسب a و b حساب‌کنید .

۱۹ ـ بر روی محور Sx سهمی به رأس S و پارامتر p دو نقطهٔ متغیر A و A' را بطریقی انتخاب می‌نمایند که $SA+SA'=۲p$ باشد . از نقاط A و A' عمودهایی بر Sx واقع در یك طرف آن اخراج نموده امتداد می‌دهند تا سهمی را در نقاط B و B' قطع کنند . بفرض $SA=x$ مطلوب است اولاً تعیین تغییرات $z=۲AB+A'B'$. ثانیاً درحالتی که تابع z دارای بزرگترین مقدار باشد ، مطلوب است محاسبهٔ زوایای مثلثی که از وتر $B'B$ ومماسهای نقاط B و B' تشکیل می‌شود . ثالثاً ثابت کنید که عمود منصف وتر BB' محور Sx را در نقطهٔ ثابتی تلاقی می‌کند و از این مطلب استنباط کنیدکه BB' همیشه بریك سهمی‌که بایدآن راتعیین نمود مماس می‌باشد .

۲۰ ـ در مثلثی رابطهٔ $۲tgA=tgB+tgC$ برقرار است :

اولاً صحت روابط زیررا ثابت‌کنید :

$$cos(B-C)=۲cosA \quad \text{و} \quad tgB\,tgC=۳$$

ثانیاً بفرض معلوم بودن زاویهٔ A سایر زوایای مثلث را حساب‌کرده بحث‌کنید .

ثالثاً بفرض معلوم بودن ضلع a ومجموع دو ضلع دیگر (l) اجزای مثلث را حل وبحث‌کنید .

رابعاً عبارت $(sinB+sinC)^۲$ را برحسب خطوط مثلثاتی زاویهٔ A تعیین‌کنید .

خامساً جدول و منحنی تغییرات $y=۲sin^۲\frac{A}{۲}(۱-۲cosA)$ را هرگاه A از صفر تا π تغییر کند رسم کرده ، سطح محصور مابین منحنی و محور $x'x$ را حساب‌کنید .

۲۱ ـ دوشعاع oA و oB در دایره‌ای به‌شعاع R با یکدیگر زاویهٔ α تشکیل می‌دهند و دودایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ که مرکز یکی درروی oA و مرکز دیگری در روی oB قرار دارد بترتیب بردایرهٔ o در نقطهٔ A و نقطهٔ B مماس می‌باشند .

اولاً ـ مطلوب است رابطهٔ مابین شعاع آنها $R_۱$ و $R_۲$ برای‌آنکه‌این دو دایره نیز بریکدیگر مماس باشند.

ثانیاً ـ با وجود این شرط $R_۱$ و $R_۲$ را حساب کنید بطریقی که $C_۱C_۲=l$ باشد و ازاین‌رو λ مینیمم l را برحسب R و $sin\frac{\alpha}{۲}$ حساب‌کنید.

ثالثاً ـ مطلوب است تغییرات λ هرگاه α از o تا π تغییرکند .

۲۲ ـ خط D به معادلهٔ $y-۲mx-m=o$ مفروض است.

اولاً ـ ثابت‌کنیدکه خط D به ازای جمیع مقادیر m بر نقطهٔ ثابتی مانند A که مختصات‌آن را تعیین خواهیدکرد مرور می‌کند .

ثانیاً ـ معادلهٔ زیر مفروض است.

$$(۱-۴m)x^۲+(۱-۴m)x-m=o \qquad (۱)$$

شرط وجود ریشه‌های معادلهٔ (۱) را برحسب مقادیر مختلفهٔ m تحقیق‌کنید .

ثالثاً ـ درحالتی‌که معادلهٔ (۱)دارای دوریشهٔ حقیقی x' وx'' می‌باشد، برخط D نقاط P و Q را بقسمی انتخاب می‌کنیم‌که طولهای آنها بترتیب مساوی x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ (۱) باشد . ثابت‌کنید که نقاط P و Q به ازای جمیع مقادیر m نسبت به‌نقطهٔ A قرینهٔ یکدیگر‌اند و نیز ثابت‌کنید که معادلهٔ مکان هندسی این نقاط چنین است $y=\frac{x^۲+x}{۲x+۱}$. ضمناً منحنی نمایش تغییرات این‌تابع را رسم‌کنید.

رابعاً ـ تحقیق‌کنیدکه به ازای چه مقداری از m زاویهٔ PoQ قائمه می‌شود (o مبدأ مختصات فرض شده است).

۲۳ ـ دو تابع $y_۱=sin\varphi+cos\varphi-۱$ و $y_۲=sin\varphi+cos\varphi+۱$ مفروضند .

اولاً ـ جدول و منحنی تغییرات آنها را نسبت به‌دستگاه دومحورقائم

هرگاه φ ازصفرتا 2π تغییر کند رسم‌کنید.

ثانیاً ـ سطح حادث ما بین دو منحنی و محور $y'y$ و عرض منتهای منحنی راحساب‌کنید.

ثالثاً ـ نسبت $z=-\frac{y_1}{y_2}$ را برحسب $x=tg\frac{\varphi}{2}$ حساب‌کنید. دراین صورت تابع $z=\frac{x(1-x)}{1+x}$ حاصل می‌شود که جدول و منحنی تغییرات آن‌را رسم می‌کنید.

رابعاً ـ معادلهٔ مماس برمنحنی فوق مرسوم از مبدأ را معلوم کرده و آن را رسم‌کنید . ازتقاطع این مماس با دوخط مجانب منحنی ، مثلثی‌تشکیل می‌شود، اضلاع و زوایای‌آن را حساب‌کنید .

۲۴ـ اولاً ـ معادلهٔ $yx^2-(2y+1)x+y+2=0$ رابه‌ازای جمیع مقادیر y بحث‌کنید وحدودی را پیداکنید بقسمی‌که -1 بین‌ریشه‌های آن واقع شود.

ثانیاً ـ به وسیلهٔ رسم منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x-2}{(x-1)^2}$ صحت بحث فوق‌را تحقیق‌کنید.

ثالثاً ـ خطی به‌عرض m به موازات محور طولها ، منحنی تابع y را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند . تعیین کنید که m باید تابع چه شرطی باشد تا خطوط oA و oB برهم عمود باشند و به ازای $m=-1$ ظل زوایای مثلث oAB راحساب کنید .

۲۵ـ تابع $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$ مفروض است :

۱ـ جدول و منحنی C نمایش تغییرات آن را رسم کنید .

۲ـ خط D که معادلهٔ آن $y=mx+1$ است منحنی C را در یك نقطه که طول‌آن صفر است قطع می‌کند. تعیین‌کنیدکه به‌ازای چه‌مقادیری از m ، خط D منحنی C را در دو نقطهٔ P و P' نیزقطع می‌کند.

۳ ـ ثابت‌کنید که وقتی‌که مقدار m تغییر می‌کند ، نقطهٔ K وسط قطعه خط $P'P$ در روی خط مستقیم ثابتی تغییرمکان می‌دهد .

۴ ـ زاویهٔ خط D را با محور xها به α نمایش داده طول قطعه خط PP' را برحسب α حساب‌کرده وتعیین‌کنید به‌ازای چه مقدار α طول PP' مساوی $\sqrt{32}$ می‌باشد .

۲۶ ـ تابع $y=x^2+2px+q$ مفروض است . مطلوب است :

۱ ـ محاسبهٔ مقادیر p و q بطوری که نقطهٔ $M\left|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right.$ نقطهٔ مینیمم باشد.

۲ ـ رسم منحنی $y=x^2-2x+2$.

۳ ـ محاسبهٔ سطح محصور بین این منحنی ومحور yها وخط $y=x$.

۴ ـ بدست‌آوردن معادلهٔ مکان هندسی‌اوساط دونقطهٔ تقاطع این منحنی با خط $y=mx$ ورسم این مکان هندسی .

۲۷ ـ تابع $y=x^3+px^2+qx+r$ مفروض‌است .اولاً ضرایب p ، q و r راطوری حساب‌کنیدکه‌این منحنی‌ازنقاط A (۰ و ۱) و B(۱و۲) گذشته و B نیز نقطهٔ عطف منحنی باشد .

ثانیاً ـ سطح محصور بین منحنی فوق و محور xها و خط $y=2$ را حساب‌کنید .

۲۸ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2(-y+1)+x(3-y)-37=0$ که درآن y پارامتر می‌باشد مفروض است .

اولاً ـ منحنی C نمایش تغییرات y را برحسب x رسم کرده نقطهٔ تلاقی منحنی را با مجانب خودش بدست‌آورید .

ثانیاً ـ ازروی این منحنی در وجود وعلامت و مقدار ریشه‌های معادلهٔ مفروض بحث‌کنید .

ثالثاً ـ می دانیم طول نقاط عطف هر منحنی (که معادله‌اش به صورت $y=f(x)$ باشد) بدین ترتیب بدست می‌آید که مشتق دوم y نسبت به x را صفر کنیم ـ حساب‌کنید مختصات نقاط عطف منحنی C را و ثابت‌کنید که این نقاط درروی یك خط مستقیم واقعند .

رابعاً ـ یکی ازاین نقاط عطف در مبدأ مختصات است . تعیین کنید نقاط تلاقی مماس دراین نقطه را بامنحنی C .

۲۹ـ تابع $y=\frac{ax+1}{x-1}$ مفروض است . اولاً مطلوب است تعیین مقدار a هرگاه مماس برمنحنی درنقطهٔ بطول ۲ موازی خط $y=1-2x$ شود . ثانیاً منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x+1}{x-1}$ را رسم‌کنید .

ثالثاً ـ ازمبدأ خطی باضریب زاویه‌ای m رسم شده است به‌ازای چه مقدار از m منحنی (C) را قطع می‌کند .

۳۰ـ تابع $y=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$ داده شده است .

۱ ـ مقدار a ، b و c راطوری حساب کنیدکه منحنی نمایش تغییرات این تابع درنقطهٔ بطول ۱ محور xها را قطع نموده و در نقطهٔ بطول $\frac{4}{3}$ دارای ماکزیمم یامینیممی مساوی $-\frac{1}{8}$ باشد .

۲ ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2}$ را رسم‌کنید .

۳ ـ اگر M وN دونقطهٔ تلاقی خط $y=\lambda$ با منحنی (C) و m و n ضریبهای زاویه‌ای oM وoN فرض شوند ، معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن m و n باشند . تعیین کنید شرطی راکه باید λ داشته باشد تا آنکه oM و oN برهم عمود باشند .

۳۱ ـ منحنی (C) بهمعادلهٔ $y=\frac{x^2+x+a}{2-x}$ داده می‌شود .

۱ ـ بهفرض معلوم‌بودن a پیدا کنید معادله‌ای راکه ریشه‌هایش طولهای

نقاط تلاقی این منحنی با خط $y=m$ باشد . چه وقت این خط برمنحنی (C) مماس می‌شود ؟

۲ـ پارامتر a را قسمی بگیریدکه تفاضل ماکزیمم و مینیمم y مساوی ۸ گردد و ماکزیمم ومینیمم راحساب‌کنید . در دو سؤال ۳ و۴ مقدار a را مساوی ۲ − بگیرید .

۳ـ جدول تغییرات y و منحنی (C) را باماس در نقطه‌ای از منحنی که طول آن ۱ است بکشید .

۴ـ پیدا کنیدمکان وسطهای وترهای (C) راکه‌موازی $x'x$ می‌باشند. این مکان راهم روی شکل بکشید .

۵ـ از روی نتایج پیش در معادلهٔ

$$\sin^2 x+(m+1)\sin x-2(1+m)=0$$

برحسب پارامترm بحث کرده شمارهٔ ریشه‌های این معادله راکه بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ واقعند تعیین‌کنید . در ازای $m=-\frac{1}{2}$ ریشهٔ معادله حساب کنید (قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم) .

۳۲ـ تابع $y=\frac{x^2+px+q}{x(x-2)}$ مفروض است .

اولاً ـ مطلوب است تعیین مقدار عددی ضرایب p و q هر گاه به ازای $x=3$ تابع دارای ماکزیمم یامینیممی برابر۲ باشد .

ثانیاً ـ جدول ومنحنی نمایش‌تغییرات تابع $y=\frac{x^2+2x-9}{x(x-2)}$ را رسم‌کنید .

ثالثاً ـ خطی موازی‌محور $x'x$ به معادلهٔ $y=m$ منحنی را تلاقی می‌کند . به ازای چه مقادیر m خط قاطع منحنی است . مطلوب‌است تعیین مکان هندسی وسط تقاطع خط با منحنی و رسم‌آن .

۳۳ـ روی نیم خط ox دونقطهٔ P و Q داده می‌شوند به‌طولهای

OP برابر ۶ سانتیمتر و oQ برابر ۴ سانتیمترو در بالای ox دو نقطهٔ A و B بقسمی می‌باشند که $0<\widehat{xoA}=a<\frac{\pi}{2}$ و $\widehat{xoB}=\frac{2\pi}{3}$ بوده A و B از o به یك فاصله‌اند ، $oA=oB=x$. اولاً مطلوب است محاسبهٔ نسبت $\frac{\overline{BQ}^2}{\overline{AP}^2}$ برحسب a و x وتعیین تغییرات آن برحسب x (به فرض ثابت بودن a) . ثانیاً این نسبت درازای یك مقدار $x=x_0$ ماکزیمم‌است ؛ x_0 یکی از ریشه‌های یك معادلهٔ درجهٔ دومی است‌که می‌نویسید ومی‌توان آن را به صورت $f(x)=\cos a$ نوشت که درآن $f(x)$ تابعی است کسری : ثالثاً وقتی که a تغییرمی‌کند ، x_0 نیز تغییر می‌کند ، مطلوب است تغییرات x_0 از روی تغییرات $f(x)$ و تعیین بزرگترین وکوچکترین مقدار x_0 .

۳۴ـ اولاً تغییرات تابع $y=\frac{3(x^2-2)}{2x+1}$ را معین‌کرده منحنی C این تغییرات را نسبت به دو محور عمود برهم ox و oy بکشید. ثانیاً از روی منحنی C در وجود و شمارهٔ ریشه‌های معادلهٔ $3\sin^2 z-2m\sin z-(m+6)=0$ برحسب اندازه‌های مختلف پارامتر m بحث‌کنید . ثالثاً خط $y=m$ با منحنی C در دو نقطهٔ M_1 و M_2 برخورد می‌کند . مکان هندسی وسط M_1M_2 را پیدا کرده‌آن راهم‌بکشید . رابعاً اگر بخواهیم oM_1 و oM_2 برهم عمود باشند ، m را چه اندازه باید گرفت ؟

۳۵ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر مفروض است :

$$4\sin 2\varphi-3\cos 2\varphi-3=2m$$

اولاً آن را حل و بحث‌کنید . ثانیاً هرگاه فرض‌کنیم که $tg\varphi=x$ باشد ، تحقیق‌کنید‌که $m=\frac{4x-3}{1+x^2}$ می‌شود وجدول ومنحنی نمایش‌تغییرات

m را هرگاه x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییرکند رسم‌کنید . ثالثاً از نقطهٔ A واقع برمحور yها به عرض ۳ به دونقطهٔ B و C از منحنی‌که طولهای آنها ۱+ و ۱− می‌باشد وصل نموده دوضریب زاویه‌ای دوخط AB و AC و $tg\widehat{BAC}$ ومساحت مثلث ABC را حساب کنید .

۳۶ـ تابع $y=\frac{x^2-\sin 2a}{x-\sin 3a}$ که در آن a کمانی است میان ۰ و ۹۰° ، $(0°<a<90°)$ ، داده می‌شود .

اولاً تغییرات y را به ازای $a=30°$ و $a=45°$ و $a=60°$ معین نموده منحنیهای نمایش این تغییرات را بکشید . ثانیاً در شکلهای مختلف منحنی نمایش تغییرات y وقتی‌که a میان ۰° و ۹۰° تغییرمی‌کند بحث کنید .

۳۷ـ تابع $y=\frac{mx^2+20x}{x^2+2x-3}$ که در آن x متغیر مستقل و m پارامتر است مفروض می‌باشد :

۱ـ مقدار پارامتر m را طوری تعیین کنید که تابع y در نقطهٔ $x=-2$ دارای ماکزیمم باشد .

۲ـ به ازای $m=7$ که بدین‌ترتیب بدست می‌آید، منحنی C نمایش تغییرات تابع y را بکشید .

۳ـ خط D به معادلهٔ $y=\lambda$ مفروض است . مطلوب است بحث در وجود نقطه‌های برخورد این خط با منحنی C برحسب مقدارهای مختلف پارامتر λ .

۴ـ نقطه‌های برخورد خط D ومنحنی C را M' و M'' می‌نامیم. مکان هندسی L وسط قطعه‌خط $M'M''$ را یافته این منحنی را نیزبکشید . ثابت کنید که منحنی L با منحنی C یك مجانب مشترك دارد . منحنی L منحنی C را در دونقطهٔ مهم قطع می‌نماید . دلیل این موضوع را بیان‌کنید .

۳۸ـ معادلهٔ $(y-3x+5)(y+3x-3)=4$ داده می‌شود :

۱ـ اگر در این معادله x را مجهول و y را پارامتر بگیریم در ریشه‌های این معادله برحسب اندازه‌های مختلف پارامتر بحث کنید .

۲ـ از روی این معادله y را برحسب x حساب کرده تغییرات y را برحسب تغییرات x معین کرده منحنی (C) نمایش تغییرات y را نسبت به دو محور عمود برهم $x'ox$ و $y'oy$ بکشید .

۳ـ منحنی (C) دارای محور تقارنی است (Δ) موازی $y'oy$ (که یکی از منصف‌الزاویه‌های دو مجانب C می‌باشد) . اگر خطی مانند $y=m$ منحنی (C) را در M و N ، و دومجانب آن Δ_1 و Δ_2 را بترتیب در P_1 و P_2 تلاقی کند ، ثابت کنید که خط قائم بر (C) در M (یا در N) و خطی که در P_1 بر Δ_1 عمود می‌شود Δ را در یك نقطه تلاقی می‌کنند (به‌عبارت دیگر این خطها روی Δ به هم برمی‌خورند) .

۴ـ از روی منحنی (C) در پاسخهای معادلهٔ

$$(۵-۳\sin x+\lambda)(۳\sin x-۳+\lambda)=۴$$

بر حسب اندازه‌های پارامتر λ بحث کنید (اگر منحنی C را بدست نیاورده‌اید مستقیماً بحث کنید).

۳۹ـ تابع $y=x^۳+ax^۲+۹x+۴$ مفروض است .

۱ـ مقدار a را بقسمی تعیین کنید که تابع به ازای $x=-۱$ ماکزیمم یا مینیمم باشد .

۲ـ پس از تعیین مقدار a جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید .

۳ـ این منحنی محور $x'x$ رادر نقاط A و B تلاقی می‌کند. مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین محور $x'x$ و قوس AB از منحنی .

۴ـ از نقطهٔ $M(x=-۱ \text{ و } y=۰)$ خطی مرور می‌دهیم که با جهت مثبت محور $x'x$ زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ بسازد . مطلوب است مختصات نقاط تلاقی این خط با منحنی .

۴۰ـ تابع $y=\dfrac{۳x^۲-۲}{x^۲+۲x-a}$ مفروض است .

۱ـ به ازای چه مقادیری از a تابع دارای ماکزیمم و مینیمم است . در صورتی‌که تابع به‌ازای x' ماکزیمم و به‌ازای x'' مینیمم باشد ، ثابت کنید که حاصل ضرب $x'x''$ مساوی با $\frac{۲}{۳}$ است .

۲ـ اگر $x'=\frac{۱}{۳}$ و $x''=۲$ باشد ، مطلوب است تعیین مقدار a و رسم منحنی نمایش تغییرات تابع .

۳ـ معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن عرضهای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع اصلی باشد و رابطهٔ مستقلی از a بین دو ریشهٔ این معادله بدست آورید .

۴۱ـ I ـ معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش در روابط زیر صدق کنند :

$$۴x'x''-۵(x'+x'')+۴=۰$$

$$(x'-۱)(x''-۱)=\frac{۱}{۱-m}$$

II ـ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم نامبرده را برحسب مقادیر m با اعداد -۱ و $+۱$ مقایسه کنید .

III ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{x^۲-۴x+۴}{x^۲-۱}$ را رسم نموده از روی شکل این منحنی نتایج قسمت دوم را بدست آورید .

IV ـ خطی موازی ox منحنی را در دو نقطهٔ M و M' قطع می‌کند. مطلوب است تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P وسط $M'M$.

۴۲ـ I ـ تابع $y=\dfrac{x^۲+۶x+p}{۲x+q}$ مفروض است : p و q را

بطریقی تعیین‌کنید که منحنی تابع فوق دارای مجانب $x=\frac{1}{2}$ بوده و محور عرضها را در نقطهٔ به عرض ۱ − قطع‌کند .

II− منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{2x^2+6x+1}{2x-1}$ را رسم کنید .

III− مختصات نقطهٔ H محل تلاقی دومجانب منحنی (C) راحساب کرده معادلهٔ خط D را که از نقطهٔ H باضریب زاویه‌ای m مرور می‌کند بنویسید و برحسب مقادیر مختلفهٔ m در عدهٔ نقاط تلاقی خط D بامنحنی (C) بحث کنید .

IV− فرض می‌کنیم‌که خط D منحنی (C) را در دونقطه مانند A و B تلاقی نماید . ثابت‌کنید که به ازای جمیع مقادیرممکنهٔ m ، نقطهٔ H وسط پاره خط AB می‌باشد .

۴۳− I− تابع $y=\frac{ax^2+b}{x+c}$ مفروض است . اولاً a ، b و c را طوری تعیین‌کنیدکه منحنی دارای مجانب $x=\frac{9}{5}$ بوده وبعلاوه خط $y=x$ منحنی را در دو نقطهٔ به طول $x=1$ و $x=2$ قطع‌کند .

II− جدول ومنحنی نمایش تغییرات $y=\frac{2x^2-6}{5x-9}$ را رسم‌کنید .

III− معادلهٔ خط مماس برمنحنی را در نقطهٔ تقاطع منحنی با محور oy بنویسید .

۴۴− ۱− تعیین‌کنید تغییرات تابع $y=1-\frac{4}{x^2}$ را و منحنی (C) نمایش آن را رسم‌کنید .

۲− ازنقطهٔ A(۲− و۰) خطی (D) باضریب‌زاویه‌ای m رسم می‌کنیم.

معادله‌ای بنویسیدکه ریشه‌هایش x های نقاط برخورد این خط بامنحنی (C) باشد . ثابت‌کنیدکه باتبدیل x به $\frac{1}{x}$ این معادله به صورت (E) درمی‌آید.

$$(E)\quad 4x^3-3x+m=0$$

درازای به‌مقادیر m خط (D) منحنی (C) رادرسه‌نقطه‌قطع‌می‌کند؟ یادریك نقطه ؛ یا برآن مماس می‌شود ؟

۳− اگر x را $\sin\alpha$ بنامیم معادلهٔ (E) را می‌توان به صورت یك معادلهٔ خیلی سادهٔ مثلثاتی نوشت . دراین معادلهٔ مثلثاتی برحسب m بحث کنید وبخصوص معین‌کنیدکه‌به m چه مقادیری باید دادتا اینکه‌برای α دو جواب میان °۱۵ و °۶۰ یا یك جواب میان °۱۵و°۶۰ بدست‌آید .

۴− به ازای چه‌عددهای صحیح x اندازهٔ y بصورت‌کسراعشاری غیر متناوب یاکسراعشاری متناوب ساده یاکسراعشاری متناوب مرکب درمی‌آید؟ بخصوص معین کنید نقطه‌هایی از منحنی (C) را که مختصات آنها عددهای صحیح می‌باشند .

۵− تعیین‌کنید مساحت سطح واقع مابین منحنی (C) ومجانب‌موازی محور xها و دوخط $x=2$ و $x=\lambda$ را $(\lambda>2)$. ثابت کنیدکه هرگاه λ بی اندازه بزرگ شود ، اندازهٔ این سطح دارای حدی است وآن‌حدراحساب کنید .

۴۵− معادلهٔ $(y-3x)(y+x)=9$ (۱) مفروض است.

اولا − اگر x را مجهول بگیریم ، در وجود وعلامت ریشه‌ها برحسب پارامتر y بحث‌کنید و همچنین اگر y را مجهول فرض کنیم برحسب پارامتر x در وجود و علامت ریشه‌ها بحث‌کنید .

ثانیاً − ازروی معادلهٔ (۱) دوتابع y ازمتغیر x بدست می‌آید . تغییرات این دو تابع را معین‌کنید ومنحنی نمایش هریك را هم جداگانه وهم نسبت به‌یك دستگاه رسم‌کنید . مجموعهٔ این دومنحنی نمایش(۱)است‌که باید بابحث (اولا) تطبیق‌کند .

ثالثاً − هرخط موازی محور yها منحنی نمایش (۱) را در دو نقطهٔ

M_1 و M_2 قطع می‌کند . مکان هندسی وسط M_1M_2 خطی است راست (Δ) که مطلوب است معادله و رسم آن . بر منحنی (۱) دو مماس موازی Δ می‌توان رسم‌کرد . آن دو مماس را هم تعیین کنید .

رابعاً ـ اگر z زاویه‌ای محصور بین ۰° و ۳۶۰° باشد، برحسب مقادیر مختلفهٔ m در معادلهٔ $3\sin^2 z+2m\sin z-m^2+9=0$ بحث کنید (هم مستقیماً وهم به‌کمك منحنی نمایش ۱).

۴۶ـ تابع $y=\frac{x^2-2mx+1}{x^2+1}$ مفروض است و منحنی نمایش آن را (c) می‌نامیم . اولاً ـ درازای همهٔ مقادیر m منحنی (c) از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد که مختصات آن را حساب خواهید کرد . ثابت کنید که m هرچه باشد ، A مرکزتقارن منحنی است . ثانیاً ـ معین کنید مقادیر x را که به ازای آنها y ماکزیمم یا مینیمم شود و اندازه‌های ماکزیمم و مینیمم را نیزحساب‌کنید وبه ازای مقادیر مختلف m ، مکان هندسی نقاطی راکه‌در آنها تابع ماکزیمم یامینیمم‌است تعیین‌کنید . ثالثاً ـ در ازای چه مقادیری‌از m منحنی (c) به محور xها برنمی‌خورد ودرازای چه مقادیری بامحور xها دونقطهٔ تلاقی M' و M'' دارد ؛ این دونوع مقادیر با دو عدد m_1 و m_2 که درازای‌آنها منحنی مرتباً در نقاط T_1 و T_2 برمحور $x'x$ مماس‌است از هم جدا می‌شوند . موقعی که دونقطهٔ تلاقی M' و M'' وجود دارد. يك رابطه بین xهای این دو نقطه می‌توان یافت که درآن m نیست . از روی این رابطه بگویید M' و M'' نسبت به T_1 و T_2 چه وضعی دارند ودوایر به قطر $M'M''$ چگونه‌اند ؛ رابعاً اگر درتابع مفروض x را $tg\alpha$ بگیریم ، (به‌ازای $m=1$)، y تابعی از α می‌شود .جدول ومنحنی این‌تابع را وقتی که α از $-\frac{\pi}{2}$ تا $+\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند رسم کنید و سطح حادث بین این منحنی ومحور طولها و دو خط $\alpha=-\frac{\pi}{2}$ و $\alpha=\frac{\pi}{2}$ را حساب کنید .

۴۷ـ اولاً : سه‌کسر $\frac{2}{x}$ و $\frac{1}{x-1}$ و $\frac{1}{x+1}$ که در آن x عددی است مثبت وبزرگتر ازواحد مفروض است . الف ـ تحقیق‌کنیدکه به ازای جمیع مقادیر x مجموع سه‌کسرفوق مولدچه نوع کسر اعشاری خواهد بود ؛ ب ـ مقدار x راچنان تعیین کنیدکه مجموع سه‌کسر فوق به‌کسرمتناوب ۰/۰۸۳۳۳... تبدیل شود .

ثانیاً : تابع $y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}$ را درنظر می‌گیریم .

۱ـ بدون استفاده ازمشتق معادله‌ای تشکیل‌دهیدکه ریشه‌هایش‌عرضهای نقاط ماکزیمم ومینیمم تابع فوق باشد .

۲ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع فوق را هنگامی که x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند رسم کنید وثابت کنید که مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است .

۳ـ از مبدأ مختصات خط غیر مشخصی رسم می‌کنیم تا منحنی راقطع کند. درتعداد نقاط تلاقی‌آن بامنحنی بحث‌کنید و وضع خط را قسمی مشخص کنیدکه طولهای نقاط تلاقی محصور باشد مابین دو عدد -1 و ۱ .

۴ـ برای آنکه چهارنقطه به طولهای a ، b ، c و d واقع برمنحنی بريك استقامت باشند ، باید چه رابطه‌ای مابین اعداد فوق برقرار باشد ؟

ثالثاً : جدول ومنحنی تابع $y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ را که $0<x<2\pi$ است تعیین کرده و رسم کنید و حجم حادث از دوران قسمتی از منحنی در حول محور ox واقع مابین‌خطوط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ را حساب کنید .

۴۸ـ اولاً ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x}$ مفروض‌است. الف ـ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که عرضهای نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنی نمایش تابع فوق برابر صفر و چهار باشد. ب ـ جدول تغییرات و منحنی (C) نمایش

تـابع $y=\frac{x^2+2x+1}{x}$ را رسم‌کنید و ثابت کنیدکه نقطهٔ $C\Big|^{0}_{2}$ مرکز تقارن منحنی (C) است ومعادله‌های نیمسازهای مجانبهای (C) را بدست آورید .

ثانیاً ـ ازنقطهٔ $M\Big|^{\alpha}_{\beta}$ چند مماس می‌توان برمنحنی (C) رسم کرد ؟

وضع نقطهٔ M را درسطح دو محور تعیین‌کنیدکه بتوان دو مماس بر منحنی (C) رسم‌کرد. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ M ، در صورتی که دومماس مرسوم بریکدیگر عمود باشند و این مکان هندسی را رسم‌کنید .

ثالثاً ـ الف ـ تابع $y=\sin x+2+\frac{1}{\sin x}$ مفروض است . جدول ومنحنی نمایش تغییرات آن را وقتی‌که x از $-\pi$ تا $+\pi$ تغییر می‌کند رسم کنید. بـ ـ درتعداد جوابهای معادلهٔ $\sin x+2+\frac{1}{\sin x}=\lambda$ کـه میان $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد برحسب مقادیر مختلف λ بحث‌کنید ونتیجه را از روی شکل تحقیق کنید .

۴۹ـ تـابع $(C)\,y=\frac{x^2+ax+b}{x-3}$ مفروض است . اولا بفرض آنکه $M\Big|^{a}_{b}$ باشد ، مکان نقطهٔ M را بقسمی تعیین‌کنید که منحنی تابع y برمحور $x'x$ مماس شود و این مکان را رسم کنید . ثانیاً مطلوب است تعیین مقادیر a و b بقسمی‌که منحنی (C) برمحور xها مماس بوده و نقطهٔ $O_1\Big|^{3}_{4}$ مرکز تقارن آن باشد . به ازای $a=-2$ و $b=1$ منحنی نمایش تابع y را رسم‌کنید . ثالثاً ازمبدأ مختصات خطی غیر مشخص رسم می‌شود. درتعداد

نقاط تلاقی وعلامت طولهای آنها بحث‌کنید . اگر این خط منحنی را در دو نقطهٔ M_1 و M_2 قطع‌کند ، مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P مزدوج توافقی نقطهٔ O (مبدأ مختصات) نسبت به دو نقطهٔ M_1 و M_2 . رابعاً مکان هندسی نقطهٔ $N\Big|^{\alpha}_{\beta}$ را پیداکنیدکه از آن بتوان دو مماس عمود برهم بر منحنی تابع (C) رسم‌کرد .

۵۰ـ اولاً ـ تابع $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$ (۱) مفروض است . الف ـ جدول تغییرات و منحنی (C) نمایش‌آن را رسم‌کنید.

ب ـ خط $y=m$ رادرسم‌می‌کنیم .معادله‌ای تشکیل دهیدکه ریشه‌هایش طولهای نقاط تقاطع‌خط ومنحنی (C) باشد وطولهای نقاط تقاطع را با اعداد -1 و $+1$ مقایسه‌کنید .

ج ـ جدول‌ومنحنی نمایش تغییرات‌تابع $y=\pm\sqrt{-3m^2-12m}$ را هنگامی‌که m تغییرمی‌کند رسم کنید .

د ـ ثابت‌کنیدکه خط‌منصف‌الزاویهٔ ناحیهٔ اول وسوم‌محورهای مختصات، منحنی (C) تابع (۱) را فقط در یك نقطه قطع می‌کند . طول آن نقطه را حساب‌کنید (جواب اصم مرکب است) .

ثانیاً ـ اگردرتابع (۱) ، x را به $tg\alpha$ تبدیل‌کنیم :

$$y=\frac{tg^2\alpha-2tg\alpha+1}{tg^2\alpha+tg\alpha+1}$$

الف ـ صورت کسرفوق را بر حسب خطوط مثلثاتی α به عبارت قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم تبدیل‌کنید .

ب ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$ را هنگامی‌که α ازصفر تا π تغییرمی‌کند رسم‌کنید.

۵۱- تابع $y=\frac{2x^2+1}{x-2}$ مفروض است .

۱ – جدول تغییرات تابع فوق را نوشته منحنی نمایش تغییرات آن را رسم کنید .

۲ – فرض کنید که منحنی نمایش تغییرات فوق را با خط $y=k$ موازی محور x قطع کرده‌ایم . در وجود نقاط تقاطع این خط و منحنی بحث کرده ماکزیمم ومینیمم تابع فوق را به‌این طریق تعیین کنید .

۳ – فرض می‌کنیم که خط $y=k$ موازی با محور x منحنی نمایش تابع فوق را در نقاط A و B قطع کند . مطلوب است معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M وسط قطعه خط AB وقتی که خط $y=k$ به‌موازات محور x تغییر مکان دهد .

۴ – تابع $y=\frac{2x^2+m^2}{x-2m}$ مفروض است . ثابت کنید که این تابع به‌ازای جمیع مقادیر m (باستثنای $m=0$) دارای ماکزیمم ومینیمم است. و اگر M' نقطهٔ ماکزیمم و M'' نقطهٔ مینیمم باشد ، ثابت کنید که نقطهٔ M وسط $M'M''$ همواره برخط مستقیمی حرکت می‌کند.

تابع $y=\sin x+\cos x$ مفروض است :

۱ – تابع y را قابل محاسبه با لگاریتم کنید .

۲ – مطلوب است اندازهٔ قوس x در تابع فوق بطریقی که مقدار تابع مساوی $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ شود (به جدول لگاریتم احتیاج ندارد).

۳ – مطلوب است جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع فوق وقتی که x از صفر تا π تغییر کند .

۴ – مطلوب است سطح محصور بین منحنی فوق و محور x بین دو نقطهٔ $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{3\pi}{4}$ (دراین محاسبه هم بجدول لگاریتم احتیاج نیست) .

۵۲ - ۱– ماکزیمم و مینیمم تابع $\frac{x^2-3x+1}{x^2+3}$ را بدون بکار بردن مشتق حساب کنید وبعد درستی نتیجه را ازروی مشتق تحقیق کنید .

۲ – اولاً – تغییرات دو تابع $y=x\pm\sqrt{x^2-3x+2}$ را معین کنید ومنحنی (C) نمایش تغییرات آنها را رسم کنید .

ثانیاً – ازروی منحنی (C) در ریشه‌های معادلهٔ $y^2-2xy+3x-2=0$ به‌حسب پارامتر x بحث کنید و همچنین ریشه‌ها را با عدد $+2$ مقایسه کنید و نتیجه رادرجدولی درج کنید .

ثالثاً – چگونه تحقیق خواهید کرد که نقطهٔ $x=y=\frac{3}{2}$ مرکز تقارن منحنی درجهٔ دوم $y^2-2xy+3x-2=0$ است ؟

۳ – در شمارهٔ ریشه‌های معادلهٔ $x^3+ax+2=0$ برحسب مقادیر پارامتر a بحث کنید .

۵۳ – مسئلهٔ ۱ – اگر M_1 و M_2 نقاط تلاقی خط $y=m$ با منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{ax^2-2x+b}{x^2-ax+a}$ باشد ، اولاً – b را تعیین کنید برای آنکه حاصلضرب طولهای M_1 و M_2 بستگی به m نداشته باشد $(b=a^2)$.

درسؤالهای زیر b را برابر a^2 اختیارکنید .

ثانیاً – ازقسمت اولاً نتیجه بگیرید که اگر تابع y دارای یك ماکزیمم ویك مینیمم باشد ، ریشه‌های مشتق y دو عدد قرینه‌اند وهمین خاصیت را از روی محاسبه هم تحقیق کنید .

ثالثاً –(C) رادرازای $a=1$ و $a=9$ رسم کنید . رابعاً – به‌کمك نمودار، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2(\lambda-9)-x(9\lambda+2)+9(\lambda-9)=0$ را در ازای مقادیرمختلف λ با اعداد ۳ و ۳– مقایسه کنید . خامساً – اگر P_1 و P_2 تصاویر M_1 و M_2 روی محور xها باشند (در ازای یکی از

مقادیر a) ، ثابت کنید وقتی که m تغییر کند ، دایرهٔ به قطر P_1P_2 بر دایرهٔ ثابتی عمود می‌ماند .

مسئلهٔ ۳ ـ در جوابهای نامعادلهٔ زیر بر حسب مقادیر مختلف m بحث کنید :

$$1-m+\sqrt{x-x^2}>0$$

۵۴ ـ مسئلهٔ اول ـ اولاً ـ درمعادلهٔ $y^2-4xy+3x^2+1=0$ بفرض اینکه y مجهول و x پارامتر باشد ، به ازای مقادیر مختلف x ریشه‌های معادله را با اعداد ۱− و ۱+ مقایسه کنید و نتیجه را در جدولی یادداشت کنید .

ثانیاً ـ جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=2x\pm\sqrt{x^2-1}$ را رسم کنید و از روی منحنی (C) به ازای مقادیر مختلفهٔ x مقادیر y را با عددهای ۱ و ۱− مقایسه کنید .

ثالثاً ـ مکان هندسی اوساط وترهای موازی محور yها را در منحنی (C) تعیین کنید و نقاطی از منحنی (C) را بدست آورید که قائم بر آن نقاط ، با ضریب زاویه‌ای m باشد . حدود مقادیر m را چنان تعیین کنید که مسئله جواب داشته باشد .

مسئلهٔ دوم ـ مقدار عبارت $y=\frac{\sqrt{3tg^2x-1}-2\sin x}{1-2\cos^2x}$ را به ازای $x=\frac{3\pi}{4}$ حساب کنید .

۵۵ ـ ۱ ـ اولاً منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را رسم کنید :

$$y=x+\frac{4}{x^2}$$

ثانیاً ـ اگر A نقطه‌ای ازمنحنی بطول ۲ باشد ، مطلوب است مساحت سطح محصور بین منحنی ومجانب غیرموازی آن وعرض ثابت نظیر بطول ۲ و عرض متغیر $x>2$. همچنین تعیین کنید حد این سطح را هرگاه x

بسمت بینهایت میل کند .

ثالثاً ـ مماس برمنحنی در نقطهٔ A منحنی را در نقطهٔ دیگری مانند B قطع می‌نماید . مطلوب است محاسبهٔ مختصات نقطهٔ B و معادلهٔ مماس برمنحنی در این نقطه .

۲ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را رسم کنید :

$$y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

۵۶ ـ ۱ ـ می‌خواهیم از نقطهٔ $M\begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix}$ خطی برمنحنی $y=\frac{1-x^2}{x^2}$ مماس کنیم . اولاً معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طولهای نقاط تماس باشد . ثانیاً مکان نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که معادلهٔ :

$$(b+1)x^3-3x+2a=0$$

یك ریشهٔ مضاعف داشته باشد. این مکان را رسم کنید ـ در آن ناحیه از سطح دومحور مختصات که معادله دارای یك جواب می‌باشد هاشور بزنید .

۲ ـ اولاً ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x\pm2\sqrt{x^2+3}$ را رسم کنید .

ثانیاً ـ مطلوب است تعیین معادله ومکان هندسی وسط وترهایی در این منحنی که همه با ضریب زاویه‌ای ۲ باشند .

۳ ـ اولاً ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\cos2x+2\sin x$ را رسم کنید . ثانیاً تابع اولیهٔ $(\cos2x+2\sin x)^2$ را حساب کنید.

ثالثاً ـ هرگاه سطح محصور بین قوسی از این منحنی و دو محور مختصات وعرض نقطه‌ای از منحنی بطول $\frac{\pi}{2}$ در حول محور xها دوران کند، حجم حادث را حساب کنید .

۵۷ ـ اولاً ـ در تابع $y=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x-1}$ ، مطلوب است تعیین

مقادیر a ، b و c بطریقی که تابع مزبور بهازای $x=2$ دارای مینیممی برابر صفر بوده و مماس برمنحنی آن در نقطهٔ بهطول $\frac{1}{2}$ با خط $y=12x$ موازی شود .

ثانیاً ــ مطلوب است رسم جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{(x-2)^2}{x(x-1)}$$

وبحث درعدهٔ نقاط تقاطع $y=m$ با این منحنی . درحالتی که خط مزبور منحنی را در دونقطهٔ M' و M'' قطع کند ، مطلوب است تعیین رابطهای بین طولهای نقاط مزبورکه از m مستقل باشد .

ثالثاً ــ اگر نقاط H' و H'' بترتیب تصاویر نقاط M' و M'' روی محورطولها باشند ، مطلوب است تعیین نقطهٔ ثابتی مانند P روی محور $x'x$ بطوریکه $PH'\times PH''$ مساوی مقدار ثابتی شود . درصورتی که نقاط H' و H'' منعکس یکدیگر باشند ، مرکز وقوت انعکاس را هم معین کنید . ضمناً ثابتکنیدکه :

الف ــ نقاط H' و H'' همیشه نسبت به دو نقطهٔ ثابت و مشخصی مزدوج توافقی یکدیگرند .

ب ــ جمیع دوایریکه به قطر $H'H''$ رسمشوند ، دارای محوراصلی ثابتی بوده وهمیشه بر دایرهٔ ثابتیکه شعاع و مرکز و معادلهٔ آن را تعیین خواهیدکرد عمودند .

۵۸ ــ مطلوب است رسم جدول ومنحنی (C) نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{x^3+4}{x^2}$$

ثانیاً ــ خطی موازی محور xها و بهعرض a منحنی (C) را قطع نموده ؛ معادلهای تشکیل دهیدکه ریشههایش طولهای نقاط تقاطع باشد ، در وجوداین نقاط بهازای مقادیر مختلفهٔ a بحثکنید و a را چنان تعیینکنید

که یکیاز ریشههای این معادله ریشهٔ مضاعف باشد . در این حال ریشههای معادله را حسابکنید . از روی شکل نیز در وجود این نقاط بهازایمقادیر a بحثکنید و درستی بحث جبری راتحقیق کنید.

ثالثاً ــ مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین قوسی از منحنی (C) وخطوط $y=x$ و $x=1$ و $x=3$.

رابعاً ــ از نقطهٔ M بهطول ۲ واقع بر منحنی (C) خطی با ضریب زاویهای m رسم شدهاست. این خط بهازای مقادیر معینی از m منحنی(C) را در دو نقطهٔ دیگر قطع میکند . معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشههایش طولهای این نقاط باشد . هرگاه معادلهٔ مطلوب چنین باشد:

$$(1-m)x^2-x-2=0$$

به ازای چه مقادیر m نقطهٔ M بین دونقطهٔ تقاطع دیگر یا در خارج آن دونقطه واقع میشود .

۵۹ ــ مسئلهٔ۱ ــ تابع $y=\frac{9(1-x)}{x^3}$ مفروضاست .

اولاً ــ بدون استفاده از مشتق مختصات نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم تابع را حسابکنید.

ثانیاً ــ جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع را رسم کنید و قوسهای محدب و مقعر و همچنین مختصات نقطهٔ عطف منحنی (C) را تعیین کنید .

ثالثاً ــ ازمبدأ مختصات خطی برمنحنی (C) مماس کنید . طول نقطهٔ تماس وضریب زاویهای خط مماس راحسابکنید .

رابعاً ــ مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی (C) و محور xها از نقطهٔ بهطول ۱ تانقطهٔ بهطول ۳.

مسئلهٔ۲ ــ اولاً ــ به ازای مقادیر مختلفهٔ m ریشههای معادلهٔ :

$$(2m-1)x^2-2x+m=0$$

را با دوعدد ۱ و ۱ــ مقایسهکرده نتیجه را درجدولی نمایش دهید.

ثانیاً ـ بازای $x = \sin\alpha$ و $y = m$ معادلهٔ فوق چنین می‌شود :

$$y = \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha}{2\sin^2\alpha + 1}$$

جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع y را هرگاه α ازصفرتا ۲π تغییر کند رسم کنید .

۶۰ـ مسئلهٔ ۱ـ معادلهٔ $y^2 + xy - 1 = 0$ مفروض است.

اولاً ـ مطلوب است رسم جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع y از روی معادلهٔ مفروض.

ثانیاً ـ هرگاه x پارامتر و y ریشهٔ معادلهٔ فوق باشد ، ریشه‌های معادلهٔ مفروض را به ازای مقادیر پارامتر x با دوعدد ۱+ و ۱− مقایسه کنید و در جدولی یادداشت‌کنید و نیز از روی شکل منحنی (C) درستی‌مقایسه را تحقیق‌کنید .

ثـالثاً ـ مطلوب است تعیین حدود ضریب زاویه‌ای خطوطی‌که از مبدأ مختصات می‌گذرند و منحنی (C) را قطع می‌کنند و نیز می‌توانید این‌حدود را از روی شکل منحنی (C) بدست‌آورید . درحالتی‌که یکی از این خطوط قائم برمنحنی (C) باشد،حساب‌کنید مختصات موقع این قائم (محل برخورد آن بامنحنی) را.

مسئلهٔ۲ـ مطلوب است رسم جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y = \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}$$

هرگاه x از صفرتا ۲π تغییر کند .

۶۱ـ ۱ـ اولاً ـ مطلوب‌است‌رسم جدول ومنحنی(C) نمایس تغییرات‌تابع:

$$y = \frac{3x}{x^3 - 2}$$

ثانیاً ثابت‌کنیدکه خط $y = mx$ فقط دردونقطه منحنی (C) را قطع می‌کند. طولهای این دونقطه راتعیین‌کنید . به ازای چه مقادیر m طولهای

این دو نقطه بین ۱ و ۲− واقع است . بدون استفاده از مشتق به ازای چه مقدار m این خط برمنحنی مماس می‌شود ؟

ثالثاً ـ ثابت کنید که منحنی (C) فقط دارای یك نقطهٔ عطف است . مختصات این نقطه را حساب کنید . در چه فواصلی از متغیر x منحنی (C) نسبت به جهت مثبت yها محدب یامقعر است ؟

۲ـ اولاً ـ مطلوب است رسم جدول ومنحنی(C') نمایش‌تغییرات تابع :

$$y^2 = x^2 - x + 1$$

ثانیاً ـ از مبدأ مختصات خطی چنان مرور نموده که برمنحنی (C') قائم است . مختصات نقطهٔ برخوردآن را با منحنی حساب‌کنید.

۳ـ مطلوب است تعیین تابع اولیهٔ عبارت $y = \sin^2 x \cdot \sin 3x$ بقسمی که به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ صفرشود .

۶۲ـ مسئلهٔ۱ـ اولاً ـ بفرض‌اینکه $M \left| \begin{array}{l} x = 1 - \sin\varphi\cos\varphi \\ y = \sin\varphi - \cos\varphi \end{array}\right.$ باشد ، مطلوب است معادلهٔ مکان نقطهٔ M هرگاه φ مقادیر ممکن را اختیار کند . تحقیق‌کنیدکه این‌مکان درچه فاصله‌ای از متغیر x واقع است.

ثانیاً ـ مطلوب است رسم جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع : $y^2 - 2x + 1 = 0$. براین منحنی قائمی باضریب زاویه‌ای m رسم شده است . مختصات موقع قائم را برحسب m حساب‌کنید .

ثالثاً ـ می‌خواهیم ازنقطهٔ $A \left| \begin{array}{l} 0 \\ a \end{array}\right.$ قائم D را برمنحنی(C) رسم کنیم . مطلوب است معادله‌ای برحسب m و a که درآن m ضریب زاویه‌ای قائم D باشد . ثابت کنید که از هر نقطهٔ محور yها فقط یك قائم بر منحنی (C) می‌توان رسم کرد . در حالت مخصوص نقطهٔ A را چنان تعیین کنید که ضریب زاویه‌ای قائم برابر۱− باشد.

رابعاً ـ از نقطهٔ $A\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix}$ خطی با ضریب زاویه‌ای -1 رسم کنید تا منحنی (C) را قطع کند. حساب کنید مساحت سطح محصور بین قوسی از منحنی (C) وخط مرسوم از A و محور xها را (آن قسمت که بالای محور xهاست).

مسئلهٔ ۲ ـ اولاً ـ مطلوب است رسم جدول و منحنی (C′) نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{(2x+1)^2}{4(x^2-x)}$$

ثانیاً ـ به فرض $y=m$ ، مطلوب است مقایسهٔ اعداد $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ با ریشه‌های معادلهٔ $4(m-1)x^2-4(m+1)x-1=0$ ، فقط از روی رسم منحنی نمایش تغییرات m برحسب متغیر x .

۶۳ـ مسئلهٔ ۱ ـ اولاً ـ در تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ضرایب را طوری تعیین کنید که $x=1$ ریشهٔ مضاعف تابع بوده و نقطهٔ عطف منحنی روی محور yها و به عرض ۲ باشد .

ثانیاً ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=(x-1)^2(x+2)$ و خط (D) به معادلهٔ $y=x+2$ را در یك دستگاه محورهای مختصات رسم نموده وسطح محصور بین منحنی وخط ، آن قسمت راکه در ناحیهٔ اول قرار دارد ، حساب‌کنید .

ثالثاً ـ در وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ $x^3-3x+2-m=0$ برحسب مقادیر m بحث کنید و نتیجهٔ بحث را از روی منحنی (C) نیز تحقیق کنید .

رابعاً ـ ثابت‌کنیدکه از نقطهٔ $A\begin{vmatrix}\alpha\\0\end{vmatrix}$ بهازای بعضی‌مقادیر α که‌تعیین‌خواهید کرد سه مماس بر منحنی (C) می‌توان رسم کرد که یکی از آنها بستگی

به موضع نقطهٔ A ندارد . معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طولهای نقاط تماس دومماس دیگر باشد وسپس موضع نقطهٔ A را آنطور تعیین‌کنید که دو مماس اخیر برهم عمود باشند.

مسئلهٔ۲ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\pm\sqrt{x^2-2x}$ را رسم کنید و ثابت کنید که دوقائم با ضریب زاویه‌ای m برمنحنی می‌توان رسم کرد . اگر A و B موقعهای دوقائم باشند ، ثابت کنید که نقطهٔ M وسط خط AB همواره نقطهٔ ثابتی است . مختصات‌آن نقطه را حساب‌کنید .

۶۴ ـ مسئلهٔ ۱ ـ اولاً ـ درتابع $y=\frac{x(x-m)}{(x+m)^2}$ مقدار m راطوری تعیین کنید تامنحنی تابع درمبدأ مختصات برنیمساز ناحیهٔ دوم مماس شود.

ثانیاً ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x(x-1)}{(x+1)^2}$ را رسم نموده و تحقیق کنید که نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ نقطهٔ عطف منحنی است .

ثالثاً ـ از روی منحنی (C) ریشه‌های معادلهٔ :

$$(m-1)x^2+(2m+1)x+m=0$$

را با اعداد ۱+ و ۱ـ مقایسه نموده و نتیجه را درجدولی بنویسید .

رابعاً ـ از هر نقطهٔ $M_1\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ عموماً سه مماس می‌توان برمنحنی(C) رسم‌کرد. معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طولهای نقاط تماس باشند . اگر $\beta=-1$ باشد ، معادلهٔ مطلوب به صورت : $2x^3+3(1+\alpha)x+1-\alpha=0$ در می‌آید . ثابت کنید که این معادله به ازای $\alpha=-3$ دارای ریشهٔ مضاعف است . مقدار ریشهٔ مضاعف و ریشهٔ دیگر را بدست‌آورده معادلات مماسها را تعیین وآنها را رسم‌کنید .

مسئلهٔ ۲ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x-\sqrt{x}$ را رسم کنیدوسطح محصور بین منحنی ودوخط $x=1$ و $x=4$ راحساب‌کنید .

۶۵- اولاً - در وجود ریشه‌های معادلهٔ:

$2x^2+3(m-1)x+m-1=0$ برحسب مقادیر m بحث کنید و m را آنطور تعیین کنید که نقطهٔ ماکزیمم منحنی سه جمله‌ای طرف اول روی محور طول قرارگیرد .

ثانیاً- منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=(x-1)(2x+1)^2$ را رسم‌کنید وجهت تحدب وتقعرآن را نسبت به yهای مثبت پیداکنید .

ثالثاً - بر نقطهٔ عطف منحنی خطی باضریب زاویه‌ای k رسم‌کنید ودر وجود نقاط تلاقی این خط با منحنی (C) بحث کنید و به ازای $k=12$ مختصات نقاط تقاطع را بدست‌آورید .

رابعاً - خط $y=12x-1$ را در صفحهٔ محورهای منحنی (C) رسم کنید وسطح محصور بین منحنی و خط مزبور ، آن قسمت را که بالای محور طول قرار دارد حساب‌کنید .

خامساً - نقاطی ازمنحنی (C) را پیدا کنید که قائمشان با جهت‌مثبت محور طول‌زاویهٔ $\frac{3\pi}{4}$ تشکیل دهد.

۶۶- اولاً - در وجود ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^2-2(2m+1)x+2m+1=0 \qquad (1)$$

برحسب مقادیر m بحث‌کنید وضمناً ثابت کنیدکه رابطهٔ :

(۲) $x'+x''=2x'x''$ که بستگی به m ندارد بین ریشه‌ها موجود است.

ثانیاً- منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(x-1)^2}{2(2x-1)}$ را رسم وثابت‌کنید که محل تقاطع مجانبها مرکز تقارن منحنی است .

ثالثاً - خط $y=m$ عموماً منحنی (C) را در دونقطهٔ M و N قطع می‌کند . اگر M' و N' تصاویر نقاط M و N روی محور طول باشند ، به‌کمک رابطهٔ (۲) تحقیق کنیدکه دونقطهٔ ثابت که تعیین خواهیدکرد برمحور طول یافت می‌شودکه پاره‌خطهای $M'N'$ را همیشه به توافق تقسیم می‌کنند .

رابعاً - خط $y=kx$ منحنی (C) را به ازای مقادیرk در دونقطه قطع می‌کند . مقدار k را آنطور تعیین کنید که نقاط تقاطع در طرفین محور yها قرار گیرند .

خامساً - ریشه‌های معادلهٔ (۱) برحسب m برابرند با :

$x=2m+1\pm\sqrt{2m(2m+1)}$ ؛ منحنی‌تابع :

$y=2x+1\pm\sqrt{2x(2x+1)}$

را رسم‌کنید .

۶۷- مسئلهٔ ۱- تابع $y=\frac{ax+1}{x^2-2}$ مفروض است .

۱- ثابت کنید که تمام منحنیهای تابع فوق به ازای جمیع مقادیر a از نقطهٔ ثابت A مرور می‌کنند . مختصات این نقطه را پیدا کنید .

۲- اگر C_1 و C_2 دو منحنی نظیر دو مقدار متمایز a_1 و a_2 باشند ، ثابت‌کنید :

الف - دو منحنی مزبور نقطهٔ مشترک دیگری غیر از A ندارند ونیز درنقطهٔ A نمی‌توانند برهم مماس باشند .

ب - شرط آنکه دومنحنی مزبور در نقطهٔ A نسبت به هم قائم باشند این است‌که $a_1a_2=-4$ باشد .

۳- در حالتی‌که تابع فوق دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم است ، تحقیق‌کنیدکه مجموع این دو مقدار بستگی به a ندارد و نیز تحقیق‌کنید کدام ازاین دومقدار بزرگتراز دیگری است .

۴- مقدار a راآنطور پیداکنید تا منحنی نظیر آن محور طول را در نقطهٔ به طول ۲٫۵ قطع‌کند .

۵- منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{-5x+1}{x^2-2}$ را رسم‌کنید.

۶- در معادلهٔ : $mx^2+5x-(2m+1)=0$

حدود m را آنطور تعیین‌کنید تا فقط یك ریشهٔ آن بین اعداد ۱- و ۲+

قرارگیرد و بعد ، از روی منحنی (C) ریشه‌های معادله را با اعداد ۳+ و ۱− مقایسه‌کنید .

۷ـ خط $y=mx$ منحنی (C) را عموماً در سه نقطه قطع می‌کند. مقدار m را آنطور بیابید تا خط مزبور در نقطهٔ به طول $-\frac{1}{2}$ بر منحنی مماس شود . مختصات نقطهٔ تلاقی دیگراین خط را با منحنی پیداکنید .

مسئلهٔ ۲ـ توابع‌اولیهٔ تابع $y=3x^2+\frac{1}{x^2}+\sqrt{2x+3}$ را بدست‌آورید واز میان‌آنها‌آن را انتخاب‌کنید که منحنی نمایش تغییراتش از نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}-1\\ \frac{1}{3}\end{matrix}\right.$ بگذرد .

۶۸ـ مسئلهٔ ۱ ـ تابع $y=\frac{x^2-x}{x^2-x-2}$ مفروض است .

۱ـ بدون‌استفاده از مشتق تحقیق‌کنید که تابع فوق فقط یك ماکزیمم یایك مینیمم دارد و این مقدار را حساب‌کنید.

۲ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید .

۳ـ ثابت کنید که دو نقطه برمنحنی می‌توان یافت که مماس برآنها محورعرضها را درنقطه‌ای به عرض یك قطع کند . طولهای این دو نقطه را پیداکنید .

۴ـ از روی منحنی (C) ریشه‌های معادلهٔ زیررا با اعداد۱+و۲− بدون هیچگونه محاسبه مقایسه‌کنید ونتیجه را درجدولی بنویسید :

$$(m-1)x^2-(m-1)x-2m=0$$

مسئلهٔ۳ـ اولا ـ منحنی نمایش تغییرات $y=\pm x\sqrt{x}-1$ رارسم کنید .

ثانیاً ـ معادلهٔقائم برمنحنی $y=x\sqrt{x}-1$ را در نقطهٔ به طول ۴

بنویسید و این قائم را رسم‌کنید .

ثالثاً ـ سطح محصور بین منحنی و محور طول وقائم مزبور، آن قسمت راکه در ربع اول قرار دارد حساب‌کنید .

۶۹ـ مسئلهٔ ۱ـ تابع $y=x(x+m)^2$ مفروض است.

۱ـ پارامتر m را آنطور تعیین‌کنید تا ضریب زاویه‌ای خط مماس برمنحنی در نقطهٔ به‌طول یك برابر ۸ شود .

۲ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x(x+1)^2$ را رسم کنید .

۳ـ از نقطهٔ A واقع برمنحنی به‌طول ۱− خطی باضریب زاویه‌ای ۲ رسم‌کنید. خواهید دیدکه این خط منحنی را در دو نقطهٔ دیگر B به طول ۱ و C به طول ۲− قطع می‌کند . سطح محصوربین منحنی ومحورطول وپاره خط AB را حساب‌کنید .

مسئلهٔ ۲ـ منحنی تابع $y=2\pm\sqrt{1-4x^2}$ را رسم‌کنید.

۷۰ـ تابع $y=\frac{x^2-2mx+1}{x-2m}$ مفروض است .

۱ـ پارامتر m راآنطور تعیین‌کنید تا فقط یکی از دو مقدار ماکزیمم ومینیمم تابع صفرشود و مقدار دیگری را حساب‌کنید. خواهید دیدبرای m دومقداربدست می‌آید. تحقیق‌کنیدکه به ازای هریك ازاین دو مقدارکدامیك از دومقدار ماکزیمم و مینیمم مفروض است.

۲ـ الف ـ بدون حل معادلهٔ $2x^3-7x+2=0$ (۱) ثابت کنید که این معادله سه ریشه دارد و تحقیق‌کنیدکه یك ریشهٔ آن ۲− می‌باشد . علامت دو ریشهٔ دیگررا بدست‌آورید.

ب ـ بدون رسم منحنی تابع فوق سطح محصور بین منحنی و محور طول و دوخط $x=0$ و $x=-2$ را حساب‌کنید.

۳ـ تحقیق‌کنید که طولهای نقاط تلاقی دو منحنی (C_1) و (C_2) نمایش تغییرات دو تابع $y_1=\frac{(x-1)^2}{x-2}$ و $y_2=\frac{1-4x}{2x}$ ریشه‌های معادلهٔ(۱) هستند . و با توجه به‌علامت ریشه‌های این معادله دو منحنی را در یك دستگاه

محورهای مختصات رسم کنید و عرضهای نظیر دو نقطهٔ تلاقی غیر از نقطهٔ به طول ۲− را k_1 و k_2 اختیار کنید .

۴− خط $y=k$ منحنی (C_1) را در دو نقطهٔ M و N به طولهای x' و x'' عموماً قطع خواهد کرد ، معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طولهای مزبور باشند و نیز همین خط منحنی (C_2) را درنقطهٔ P بطول x_1 که پیدا خواهیدکرد تلاقی می‌کند. وضع این سه نقطه را نسبت‌بهم، وقتی‌که k تغییرمی‌کند ، ازروی شکل بررسی‌کنید و نتیجه را درجدولی نقل‌کنید.

۵− به ازای دومقدار k که‌تعیین خواهیدکرد نقطهٔ P وسط پاره خط MN قرار دارد . اگر P_1 و P_2 دو موضع مذکور و O_1 و O_2 بترتیب مراکز تقارن دومنحنی (C_1) و (C_2) باشند ، نشان دهیدکه این‌چهارنقطه برامتداد یك خط مستقیم قراردارند و معادلهٔ این‌خط را بدست‌آورید.

۷۱− مسئلهٔ ۱ − تابع $y=\frac{ax^2+bx+4}{2x^2+(a+3)x-2b}$ مفروض‌است.

۱− دوپارامتر a و b را آنطور تعیین کنید تا نقطهٔ ماکزیمم منحنی روی نیمسازناحیهٔ اول درنقطه‌ای بطول ۱− قرارگیرد.

۲− منحنی(C)نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x+4}{2x^2+3x-2}$ را رسم کنید .

۳− ازروی منحنی (C) ریشه‌های معادلهٔ :

$$3mx^2+(3m-1)x-2(m+2)=0 \qquad (1)$$

را با اعداد ۱+ و ۱− مقایسه‌کرده و نتیجه را در جدولی نقل‌کنید .

۴− خطوط (D) به معادلهٔ $y=m$ با منحنی (C) عموماً در دو نقطهٔ A و B برخورد می‌کند. نشان دهیدکه طولهای این دونقطه ریشه‌های‌معادلهٔ (۱) هستند . ثابت‌کنید که بین خطوط (D) فقط یك خط وجود دارد که در ازای آن ، مثلث AOB در زاویهٔ O (مبدأ مختصات) قائمه است واین‌خط بالای محور طول واقع‌است.

۵− کدرحل قسمت قبل معادله‌ای بصورت $m^3-m-2=0$ پیدا خواهیدکرد :

الف − جهت تحدب وتقعر و مختصات نقطهٔ عطف منحنی تابع: $y=x^3-x-2$ را تعیین‌کنید .

ب − توابع اولیهٔ تابع مزبور را پیدا کنید وبین آنها آن را انتخاب کنید که مماس برمنحنی‌نظیرآن در نقطه‌ای به‌طول ۲ از مبدأ مختصات‌بگذرد.

مسئلهٔ ۲ − منحنی نمایش تغییرات تابع زیررا رسم‌کنید:

$$y=2x+4\pm\sqrt{2x+4}$$

۷۲− مسئلهٔ‌اول−اولاً− منحنی‌نمایش‌تغییرات تابع $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ را رسم‌کنید .

ثانیاً− معادلهٔ $x^3-3x^2-3x+1=0$ (۱) را حل‌کنید وتحقیق کنیدکه ریشه‌های معادلهٔ (۱) طولهای نقاط عطف منحنی تابع فوق هستند.

ثالثاً − اگرریشه‌های معادلهٔ (۱) را x_1 ، x_2 و x_3 فرض‌کرده و در تابع فوق قرار دهیم ، سه مقدار y_1 ، y_2 و y_3 بدست خواهندآمد . ثابت کنید که سه نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_2\\y_2\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}x_3\\y_3\end{vmatrix}$ روی یك خط مستقیم قرار دارند .

مسئلهٔ دوم − درمعادلهٔ $(m-1)x^2-3mx+4m-3=0$ مقادیرm را آنطورتعیین‌کنید تا یك‌ریشهٔ معادله بزرگتر از ۲− وکوچکتر از واحد باشد.

مسئلهٔ سوم − توابع اولیهٔ تابع زیررا حساب‌کنید:

$$y=\frac{2x^3+1}{x^2}+\sqrt[3]{x^2}$$

۷۳− ۱− درتابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ضرایب a ، b ، c و d راآنطوربیابید تا منحنی در نقطهٔ به طول ۱− برمحور طول مماس شود و نقطهٔ بطول $\frac{1}{3}$ نقطهٔ عطف منحنی باشد و قائم بر منحنی در نقطهٔ بطول۲ موازی خط $x+3y=0$ شود .

۲ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=(x+1)^2(x-3)$ را رسم‌کنید و سپس دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}3\\0\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}0\\-3\end{vmatrix}$ را که هر دو روی منحنی قرار دارند به‌هم وصل‌کنید وسطح محصور بین منحنی (C) و وتر AB را بدست آورید .

۳ـ از نقطهٔ مذکور B خطی باضریب‌زاویه‌ای m مرور دهید. این‌خط با منحنی (C) عموماً در دو نقطهٔ M و N برخورد می‌کند. ثابت‌کنیدکه مکان هندسی نقطهٔ Q وسط پاره خط MN خط ثابتی است‌که معادلهٔ آن را تعیین خواهیدکرد .

۴ـ ثابت‌کنیدکه دو نقطهٔ M و N ممکن نیست هردوسمت‌چپ‌نقطهٔ B قرارگیرند و حدود m را وقتی‌که هردو آنها موجود و سمت راست نقطهٔ B باشند پیداکنید .

۵ـ به فرض $m=1$ مختصات دونقطهٔ M و N را حساب‌کنید و نشان دهیدکه‌این دو نقطه محلهای برخورد منحنی(C)بامنحنی(C') نمایش‌تغییرات تابع $y=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{-x^2+x+\frac{49}{4}}$ می‌باشند . بارعایت‌این نکته منحنی (C') را در صفحهٔ محورهای منحنی(C) رسم‌کنید.

۷۴ـ مسئلهٔ اول ـ ۱ـ در تعداد ریشه‌های معادلهٔ : $x^3-3mx^2-3x+m=0$ به ازای مقادیرمختلف m بحث‌کنید.

۲ ـ تابع $y=\frac{x^3-3x}{3x^2-1}$ مفروض‌است.الف‌ـ‌بدون استفاده ازمشتق تحقیق کنیدکه منحنی فوق‌ماکزیمم یا مینیمم‌ندارد. ب ـ منحنی نمایش‌تغییرات $y=\frac{x^3-3x}{3x^2-1}$ را رسم‌کنید . تقعر و تحدب منحنی آن را نسبت به جهت مثبت محور y پیدا کنید و مختصات نقطهٔ عطف‌آن را حساب‌کنید. ج‌ـ‌ازروی شکل منحنی بحث ۱ را تحقیق‌کنید .

مسئلهٔ دومـ ۱ـ علامت عبارت $1-2x\sqrt{x}$ رابه‌ازای مقادیرمختلف

x پیداکنیدودرجدولی بنویسید . ۲ـ تابع $y=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ مفروض است .

الف ـ منحنی نمایش تغییرات‌آن را رسم کنید .

ب ـ نقطه‌ای‌ازمنحنی فوق راپیداکنید که‌خط مماس برآن باخط‌مجانب مایل آن ، زاویهٔ °۱۳۵ یا °۴۵ بسازد . دراین صورت معادلهٔ خط مماس را بنویسید .

ج ـ سطح محصوربین منحنی فوق و مجانب مایل آن ودو خط $x=1$ و $x=2$ راحساب‌کنید .

امتحان جبر سال‌ششم‌ریاضی دبیرستانها‌وداوطلبان متفرقهٔ‌کشور

درخرداد ماه ۱۳۴۴

(مدت ۲/۵ ساعت)

تابع $y=\frac{x+2m}{x^2-mx-2}$ مفروض است :

۱ ـ بدون استفاده از مشتق ثابت‌کنید که ماکزیمم و مینیمم این تابع بفرض آنکه موجود باشند متحدالعلامه‌اند . مقادیرm را آنطور بیابید که ماکزیمم تابع ، ۹برابرمینیمم آن باشد .

۲ ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x+2}{x^2-x-2}$ را رسم کنید . و به‌کمك آن ، اعداد ۲− و ۱+ را با ریشه‌های معادلهٔ :

$$mx^2-(m+1)x-2(m+1)=0 \quad (1)$$

کاملاً مقایسه نمایید .

۳ ـ خط (D) بمعادلهٔ $y=m$ منحنی (C) را عموماً دردو نقطهٔ A و B قطع می‌نماید که طولهای این نقاط ریشه‌های معادلهٔ (۱) هستند ـ اگر A' وB' تصاویر آنها برمحورطول باشند ، ثابت‌کنیدکه نقطهٔ ثابتی مانند i برمحورطول آنطور می‌توان یافت که چون خط (D) به موازات خود حرکت کند ، حاصلضرب $iA'.iB'$ همواره مقدار ثابتی باشد ـ طول این نقطه و مقدارثابت را تعیین‌کنید واز آن نتیجه بگیرید که دونقطه روی منحنی وجود دارند که تصاویر آنها برمحورطول مزدوج توافقی نقاط A' و B' هستند . این دو نقطه را پیداکنید .

۴ ـ تابع $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{16}{3}$ مفروض است :

الف ـ جهت تحدب وتقعر منحنی (C') نمایش تغییرات این تابع را نسبت به محورعرضها بررسی نمایید وبعد منحنی (C') رادردستگاه محورهای منحنی (C) رسم کنید .

ب ـ مماس برنقطهٔ عطف منحنی و مماس برنقطهٔ ماکزیمم آن را رسم کنید وسطح محصور بین منحنی و این دو مماس را که در ربع دوم قرار دارد حساب کنید .

۵ ـ ثابت کنیدکه بردو منحنی (C) و (C') نقاطی بهطولهای مشترک وجود دارندکه درآن نقاط مماس برمنحنی (C') موازی قائم برمنحنی (C) است وبخصوص در یکی از نقاط تقاطع دو منحنی مماس برمنحنی (C') قائم برمنحنی (C) میباشد . مختصات این نقطه و طولهای آن نقاط را بدست آورید .

یادآوری : قسمتهای مختلف مسئلهٔ فوق بههم بستگی ندارند ومیتوان هرقسمت را مستقلا حل کرد .

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستانها وداوطلبان متفرقهٔ کشور

در شهریورماه ۱۳۴۴

(مدت ۲/۵ ساعت)

I ـ تابع $y=\frac{x-2a}{x^2-a}$ مفروض است :

۱ ـ ثابت کنید که منحنیهای نمایش تغییرات تابع فوق از دو نقطهٔ ثابت میگذرند واین دونقطه روی خطی موازی محور طول قرار دارند . مختصات آن دونقطه و معادلهٔ این خط راپیداکنید .

۲ ـ مقدار a راآنطوربیابید که طولهای نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنی تابع عکس یکدیگر باشند وضمناً تحقیق کنیدکه بهازای جمیع مقادیر a حاصل

جمع مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع مقداری است ثابت ، این مقدار ثابت را حساب کنید .

۳ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x-2}{x^2-1}$ را رسم کنید .

اگر A و B بترتیب نقاط تقاطع (C) با محورهای طول و عرض باشند ، معادلهٔ خط AB رابنویسید و وضع آن را بامنحنی تحقیق کنید واین خط را درصفحهٔ محورهای منحنی (C) بکشید .

۴ـ منحنی (C') نمایش تغییرات تابع $y=1\pm\sqrt{-x^2-2x+1}$ را درصفحهٔ محورهای منحنی (C) رسم کنید . مماس براین منحنی رادرنقطهٔ B پیدا ورسم کنید و تحقیق نمایید که این مماس قائم برمنحنی (C) در همین نقطه است .

II ـ مقدار حقیقی کسر $\frac{x^2-x-2}{(x-2)(x^3-3x^2+4)}$ را به ازای $x=-1$ و $x=2$ حساب کنید .وضمناً کسرفوق را بهسادهترین صورت خود تبدیل کنید .

توابع اولیهٔ تابع $y=\frac{1}{(x-2)^2}$ را بدست آورید و سطح محصور بین منحنی ودوخط $x=1$ و $x=m>1$ را حساب کنید وحد این سطح را وقتیکه m بهسمت ۲میل میکند، پیدا کنید (رسم منحنی تابع لزومی ندارد)

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستانها وداوطلبان متفرقهٔ کشور

در خرداد ماه ۱۳۴۵

(مدت ۲/۵ ساعت)

۱ ـ الف ـ تابع $y=\frac{ax+b}{(x-2)^2}$ مفروض است . مقادیر a و b را حساب کنید بطریقی که خط $2y-2x=1$ درنقطهٔ واقع در روی محور yy' بامنحنی نمایش تابع مماس باشد .

ب ـ بدون استفاده از مشتق مقادیر ماکزیمم ومینیمم تابع

$y=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$ راحساب کنید وبخصوص توضیح دهید که به‌چه‌دلیل یکی از این دو مقدار به‌سمت بینهایت میل می‌کند .

ج ـ مختصات نقطهٔ عطف و جهت تحدب و تقعر منحنی نمایش تابع $y=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$ را معین کنید .

د ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$ و خط $2y-2x=1$ را دریك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید .

۲ـ درو جود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+3x^2+m=0$ به‌ازای مقادیرمختلف m بحث کنید .

اگر(۲ −) یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم بالا باشد مقدار m ودوریشهٔ دیگرمعادله راحساب کنید .

۳ ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x\pm 2\sqrt{5-x^2}$ را رسم کنید .

۴ ـ تابع $y=8(x-1)(x^2-2x+3)^3$ مفروض است . تابع اولیهٔ این تابع را بقسمی حساب کنید که به‌ازای ($x=1$) مقدار آن برابر (۱۶) گردد .

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور

درشهریورماه ۱۳۴۵ (مدت ۲/۵ ساعت)

مسئلهٔ اول ـ تابع $y=\frac{x^2+4ax+12}{x^2-ax-3}$ مفروض است :

۱ ـ بدون استفاده ازمشتق ثابت کنید که به‌ازای جمیع مقادیر a یکی‌از دومقدارماکزیمم یا مینیمم تابع مقداری است ثابت . سپس مقادیر a راحساب کنید بطریقی که مقدار دیگر ماکزیمم یامینیمم تابع برابر ($-\frac{1}{4}$) باشد.

۲ـ جدول ومنحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2+8x+12}{x^2-2x-3}$ را رسم کنید .

۳ـ مقادیری از m را تعیین کنید که خط $y=m$ منحنی (C) را در دو نقطه قطع کند یا بر آن مماس گردد .

۴ـ خط $y=m$ اکثراً منحنی (C) را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند ؛ مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P وسط پاره خط MN .

۵ـ مقادیر m رابطریقی تعیین کنید که یکی ازطولهای نقاط تقاطع خط $y=m$ بامنحنی (C) بین دوعدد (۱ و ۲ −) باشد .

مسئلهٔ دوم ـ اولاً جدول و منحنی (C') نمایش تغییرات تابع $y=x-2\sqrt{x}$ را رسم کنید .

ثانیاً ـ معادلات مماسهایی‌راکه ازنقطهٔ A(۰ و ۲ −) برمنحنی(C') رسم می‌شوندبنویسید ومختصات نقاط تماس را حساب کنید .

ثالثاً ـ سطح محصور بین منحنی (C') و محور xها را حساب کنید .

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور

در خرداد ماه ۱۳۴۶ (مدت ۲/۵ ساعت)

مسئلهٔ اول ـ تابع $y=\frac{27x+a}{(2x+b)^3}$ مفروض است :

الف ـ a و b راچنان پیدا کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع فوق محور طولها را در نقطه‌ای به طول $x=1$ قطع کرده و ضریب‌زاویه‌ای خط مماس برمنحنی دراین نقطه ، $m=-27$ باشد .

ب ـ جدول‌ومنحنی C نمایش‌تغییرات تابع $y=\frac{27(x-1)}{(2x-3)^3}$ را رسم کنید .

ج ـ جهت تقعر وتحدب منحنی C رانسبت به yهای مثبت‌پیداکرده و مختصات نقطهٔ عطف منحنی C را پیداکنید .

د ـ سطح محصور بین منحنی C و محورهای مختصات را در ناحیهٔ اول پیداکنید .

ه ـ در تعداد ریشه‌های معادلهٔ :

$$k(2x-3)^3=27(x-1)$$

برحسب مقادیر مختلف k بدون استفاده ازمنحنی C بحث‌کنید .

مسئلهٔ دومـ معادلهٔ $y^2-2y(x+2)-(a-1)x^2+4x=0$ مفروض است :

اولاً ـ a را چنان پیداکنیدکه عرض نقطهٔ ماکزیمم منحنی‌تابع فوق، $2+2\sqrt{2}$ باشد .

ثانیاً ـ ثابت‌کنیدکه نقطهٔ $O'\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix}$ مرکز تقارن منحنی C_1 به معادلهٔ : $y^2-2y(x+2)+2x^2+4x=0$ می‌باشد .

ثالثاً ـ جدول‌ومنحنی C_1 نمایش‌تغییرات‌تابع $y=x+2\pm\sqrt{4-x^2}$ را رسم‌کنید .

رابعاً ـ از مبدأ مختصات ، خطی باضریب‌زاویه‌ای m مرور می‌دهیم‌تا منحنی C_1 را بغیراز مبدأ ، درنقطهٔ A قطع‌کند ؛ مطلوب‌است تعیین m برای آنکه $OA=2$ باشد .

خامساً ـ نقطه‌ای مانند M برمنحنی C_1 یافت می‌شودکه چون‌به نقطهٔ O (مبدأ مختصات) وصل کنیم ، OM ماکزیمم باشد ؛ مطلوب است تعیین معادله‌ای‌که طول نقطهٔ M را بدهد .

امتحان جبر سال ششم‌ریاضی‌دبیرستانها و داوطلبان متفرقهٔ کشور

درشهریورماه ۱۳۴۶ (مدت ۲/۵ ساعت)

مسئلهٔ اول ـ تابع :

$$y=\frac{x^2+ax+2a}{x^2+ax-2a} \quad ، \quad (a\neq 0)$$

مفروض است .

۱ـ جهت تغییرات و ماکزیمم یا مینیمم این تابع را به ازای مقادیر مختلف a تعیین‌کنید .

۲ـ a راطوری تعیین نماییدکه خط $x=-\frac{1}{2}$ محور تقارن منحنی تابع باشد .

۳ ـ جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{x^2+x+2}{x^2+x-2}$$

را رسم نمایید .

۴ ـ معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طولهای نقاط تقاطع خط $y=mx$ با منحنی (C) باشد . ثابت کنید به ازای $m=1$ این خط در نقطه‌ای مانند A بر منحنی مماس و در نقطهٔ B باآن متقاطع است ؛ مختصات نقاط A و B را بدست‌آورید .

مسئلهٔ دوم ـ تابع $y=x^4+ax^2+b$ مفروض است :

۱ـ ضرایب a و b راآنطور بیابیدکه قائم بر منحنی در نقطهٔ N از آن ، خط (D) به معادلهٔ: $24y=-x+2$ باشد، (طول نقطهٔ N برابر ۲ است) .

۲ـ جهت تقعریا تحدب و نقاط عطف منحنی (C_1) به معادلهٔ : $y=x^4-2x^2-8$ را مشخص وتعیین نمایید .

۳ـ منحنی (C_1) نمایش تغییرات تابع دو مجذوری : $y=(x^2-4)(x^2+2)$ را رسم‌کنید .

مسئلهٔ سوم ـ اولاً ـ منحنی(H) به معادلهٔ $y=x+\sqrt{x^2+4x}$ را رسم نمایید .

ثانیاً ـ هرگاه M نقطه‌ای از منحنی (H) به طول α باشد ، مطلوب است تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M' قرینهٔ M نسبت به نقطهٔ ω(۲− و ۲−) وقتی α تغییرمی‌نماید .

پس‌ازآن ، بدون‌هیچگونه محاسبه‌ای، منحنی $y=x-\sqrt{x^2+4x}$ را در همان دستگاه محورهای مختصات که منحنی (H) را رسم کرده‌اید ، رسم نمایید .

امتحان جبر سال‌ششم ریاضی دبیرستانها وداوطلبان‌متفرقهٔ کشور

در خرداد ماه ۱۳۴۷ (مدت ۲/۵ ساعت)

مسئلهٔ اول ـ اولاً ـ جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

را رسم‌کنید .

ثانیاً ـ به‌کمك منحنی (C) ریشه‌های معادلهٔ :

$$(m-1)x^2-2(m-1)x+m=0$$

را با دو عدد ۱ و ۲ مقایسه‌کرده و نتیجه را در جدولی مرتباً بنویسید .

ثالثاً ـ ثابت‌کنید خط $x=1$ محور تقارن منحنی (C) است .

رابعاً ـ سطح محصور بین منحنی (C) و محور xها و دو خط $x=-2$ و $x=0$ و همچنین حجم حادث از دوران این سطح را حول محور xها حساب‌کنید .

خامساً ـ از نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}1\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ واقع در صفحهٔ محورهای مختصات خط MN را بر منحنی (C) عمود می‌کنیم (N پای عمود است) ؛ ثابت‌کنید طول نقطهٔ N از معادلهٔ :

$$(x-1)^6+(x-1)^2=2$$

بدست می‌آید و این معادله را حل‌کرده طولهای نقطهٔ N را بدست آورید .

مسئلهٔ دوم ـ مطلوب است رسم جدول و منحنی (C') نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{\pm\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$$

مسئلهٔ سوم ـ اولاً ـ برحسب مقادیرمختلف m در وجود ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^3+mx^2+2=0$$

بحث‌کنید :

ثانیاً ـ اگر x' و x'' و x''' ریشه‌های معادلهٔ فوق فرض شوند ، مطلوب است محاسبهٔ عبارت زیر به کمك روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم .

$$(x'x'')^3+(x'x''')^3+(x''x''')^3$$

امتحان جبر سال‌ششم ریاضی دبیرستانهاوداوطلبان‌متفرقهٔ کشور

در شهریورماه ۱۳۴۷ (مدت ۲/۵ ساعت)

مسئلهٔ اول ـ تابع :

$$y=x^3+ax+b$$

مفروض است .

الف ـ دو پارامتر a و b را بطریقی تعیین‌کنید تا نقطهٔ مینیمم منحنی (C) نمودار تابع فوق روی محور طولها در نقطه‌ای به‌طول $x=1$ واقع شود.

ب ـ جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع :

$$y=x^3-3x+2$$

را رسم‌کنید .

ج ـ مختصات نقطهٔ عطف منحنی (C) را پیداکرده وثابت‌کنید این نقطه مرکز تقارن منحنی (C) است .

د ـ در تعداد وعلامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم :

$$x^3-3x+2-m=0$$

برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید (هم مستقیماً و هم به‌کمک منحنی C)

هـ ـ سطح محصور بین منحنی C ومحور xها را حساب کنید .

مسئلهٔ دوم ـ تابع :

$$y=\frac{ax^2-5x+a}{3x^2-5ax+3}$$

مفروض است ، $a\neq\pm\sqrt{3}$.

۱ـ مختصات نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع فوق را پیدا کنید . خواهید دید که طول این نقاط بستگی به a ندارد ؛ سپس پارامتر a را بطریقی تعیین کنید که مقدار ماکزیمم یامینیمم تابع فوق برابر $\frac{1}{4}$ شود .

۲ـ جدول ومنحنی (C_1) نمایش تغییرات تابع

$$y=\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3}$$

را رسم کنید .

مسئلهٔ سوم ـ تابع :

$$x^2-2x-y^2=0$$

که منحنی تغییرات آن را (C_2) می‌نامیم مفروض است .

اولا ـ بدون استفاده از مشتق ثابت کنید که منحنی (C_2) دارای نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم نیست .

ثانیاً ـ منحنی (C_2) نمایش تغییرات تابع :

$$y=\pm\sqrt{x^2-2x}$$

را رسم کنید .

ثالثاً ـ معادلات خطوط مماس و قائم برمنحنی (C_2) را در نقطه‌ای به طول $x=3$ که دارای عرض مثبت می‌باشد بنویسید

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستانها وداوطلبان متفرقهٔ کشور

در خردادماه ۱۳۴۸ (مدت ۲/۵ ساعت)

مسئلهٔ اول ـ تابع :

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{x}$$

مفروض است .

الف ـ پارامترهای a و b و c راطوری معین کنید که خط $y=x$ مجانب نمودار تابع فوق بوده وعرض نقطهٔ مینیمم منحنی نمایش آن $y=2$ باشد .

ب ـ جدول ومنحنی (C) نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{x^2+1}{x}$$

را رسم کنید .

ج ـ از مبدأ مختصات دو خط بر منحنی (C) عمود می‌کنیم ؛ مطلوب است محاسبهٔ مختصات پای این عمودها .

د ـ دو نقطه روی محور xها یافت می‌شود که چون ازآن نقاط دومماس برمنحنی (C) رسم کنیم ، دو مماس برهم عمود باشند ؛ مطلوب است تعیین مختصات این نقاط .

هـ ـ به‌کمک منحنی (C) معلوم کنید معادلهٔ :

$$m=\frac{(2\sin\alpha+1)^2+1}{2\sin\alpha+1}$$

در ازای چه مقادیر m دارای جواب است .

مسئلهٔ دوم ـ تابع :

$$y=\pm x\sqrt{a^2-x^2}$$

مفروض است (a مقدار معلوم ومثبتی درنظرگرفته شده است) .

اولا ـ جدول ومنحنی (C_1) نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید .

ثانیاً ـ a را طوری پیداکنید که نسبت حجم حادث از دوران سطح

منحنی (C_1) حول محور xها درفاصلهٔ $x=0$ تا $x=a$ به سطح محصور بین منحنی ومحور xها در همین فاصله برابر $\frac{8\pi}{5}$ باشد (منظور نسبت دو عدد حجم و سطح می‌باشد) .

مسئلهٔ سوم ـ معادلهٔ درجهٔ سوم :

$$x^3+kx^2+4=0$$

مفروض است .

اولا ـ درتعداد وعلامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔسوم فوق در ازای مقادیر مختلف k بحث‌کنید .

ثانیاً ـ هرگاه α و β و γ ریشه های معادلهٔ درجهٔ سوم فوق فرض شوند ، k را طوری معلوم‌کنیدکه داشته باشیم $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\gamma$.

مسئلهٔ چهارم ـ معادلات مجانبهای منحنی (C_2) به معادلهٔ :

$$y=2\pm x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

را پیداکنید وثابت‌کنید خط $y=2$ محور تقارن منحنی (C_2) می‌باشد :

مسئلهٔ پنجم ـ تابع :

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

که نمودارآن را (C_3) می‌نامیم وخط $y=m$ مفروضند $\left(\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\right)$.

ثابت کنید معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P وسط MN [M و N نقاط تلاقی خط $y=m$ بامنحنی (C_3) می‌باشد] عبارت است از :

$$y=\frac{2ax+b}{2a'x+b'}$$

بین مسئلهٔ سوم و (چهارم و پنجم) که مجموع بارمشان ۴ می‌باشد ، بدلخواه یکی را انتخاب کنید ؛ مسئلهٔ اول ودوم اجباری است .

پایان